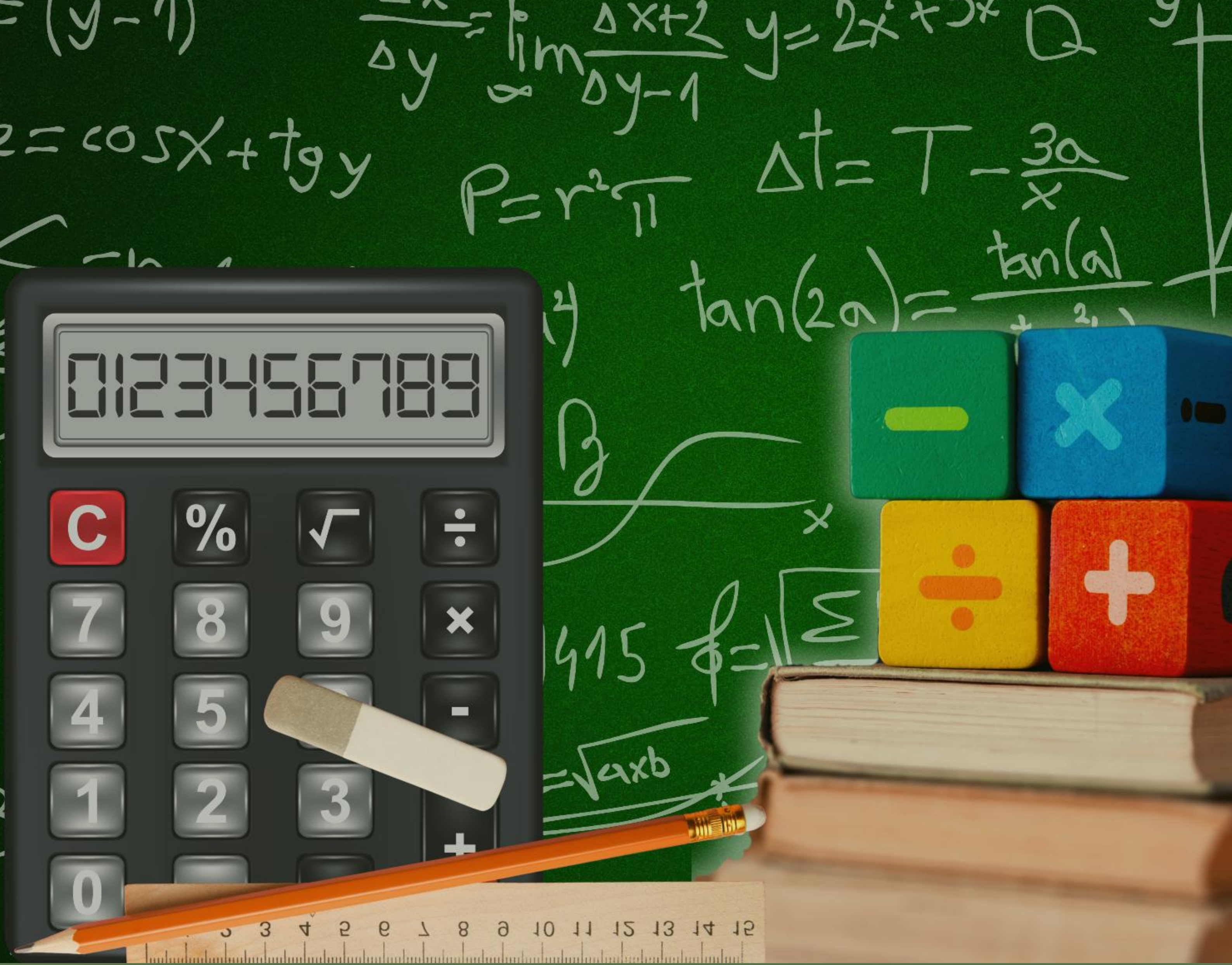


KELAS 9

MATEMATIKA

Ruang dan Angka dalam Kehidupan:

Buku Pegangan Matematika untuk Siswa Kelas 9

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas terbitnya e-book Matematika ini yang merupakan bagian dari upaya menghadirkan pembelajaran yang lebih mudah diakses oleh seluruh pelajar Indonesia. Matematika adalah mata pelajaran yang mempelajari tentang pola pikir logis, keterampilan berhitung, serta kemampuan memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.

E-book ini disusun berdasarkan Capaian Pembelajaran Matematika Fase D (sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Nomor 008/H/KR/2022 Tentang Capaian Pembelajaran Pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah Pada Kurikulum Merdeka). Konten e-book ini dirancang agar peserta didik dapat memahami materi Matematika secara komprehensif, mengasah keterampilan berpikir kritis, serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain materi utama, e-book ini juga dilengkapi dengan latihan soal, pembahasan, serta tautan ke sumber belajar tambahan seperti video pembelajaran interaktif.

E-book ini merupakan bagian dari platform Fitri, sebuah platform pembelajaran digital yang menyediakan akses gratis ke berbagai materi belajar, termasuk e-book, latihan soal, dan video pembelajaran interaktif untuk seluruh anak Indonesia. Fitri hadir sebagai wujud kontribusi nyata dalam mendukung pemerataan akses pendidikan berkualitas di Indonesia. Dengan semangat gotong royong dan inklusi, Fitri berkomitmen untuk membantu seluruh siswa, di mana pun berada, agar dapat belajar secara mandiri, efektif, dan menyenangkan. Hal ini selaras dengan tujuan besar pendidikan Indonesia, yaitu mewujudkan generasi yang cerdas, berkarakter, dan siap menghadapi tantangan zaman.

Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung tersedianya e-book ini. Semoga kehadiran e-book Matematika ini dapat memberikan manfaat nyata dalam proses belajar peserta didik dan turut berkontribusi dalam meningkatkan literasi bangsa.

Jakarta, Juli 2025

Tim Fitri

Daftar Isi

BAB 1

OPERASI ALJABAR

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Bernalar Kritis**

Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika yang melibatkan operasi aljabar.

Kata Kunci: Bentuk Aljabar, Pecahan Aljabar, Pemfaktoran, Penjabaran

Tujuan Pembelajaran: Menguasai Berbagai Bentuk Operasi Aljabar

1. **Memecahkan masalah operasi hitung pada suku sejenis dan tidak sejenis.**
    - ▷ Memahami konsep dasar suku sejenis dan tidak sejenis.
    - ▷ Mengaplikasikan konsep aljabar untuk menyelesaikan masalah matematika.

2. **Menyelesaikan persoalan terkait operasi perkalian dan penguadratan bentuk aljabar suku dua.**
    - ▷ Menjelaskan konsep aljabar dan bagaimana penggunaannya dalam perkalian dan penguadratan.
    - ▷ Menggunakan metode aljabar untuk berbagai kasus matematika.

3. **Menyelesaikan permasalahan operasi hitung pada pecahan aljabar dengan penyebut satu suku atau suku dua.**
   - ▷ Mengidentifikasi jenis-jenis operasi hitung dalam pecahan aljabar.
   - ▷ Menerapkan metode perhitungan dalam kasus pecahan aljabar.

4. **Memfaktorkan (faktorisasi) bentuk aljabar sampai dengan suku tiga.**
   - ▷ Mengembangkan model faktorisasi untuk menyelesaikan persoalan aljabar.
   - ▷ Menganalisis pemfaktoran dalam aljabar suku tiga.

5. **Menyederhanakan pecahan bentuk aljabar dengan menggunakan pemfaktoran atau faktorisasi.**
   - ▷ Menghitung nilai pecahan menggnakan pemfaktoran.
   - ▷ Menggunakan perkalian dan pemfaktoran bentuk aljabar untuk menyelesaikan masalah.

1. Penyederhanaan Bentuk Aljabar

Guru sedang Mengajar Matematika – Freepik

Apabila x mendefinisikan suatu bilangan, maka dapat ditulis:

$x \cdot x = x^2$

$x \cdot x \cdot x = x^3$

Huruf x dinamakan variabel karena dapat diganti dengan berbagai bilangan dan digunakan untuk mewakili suatu nilai yang belum diketahui atau bersifat umum.

Dapat juga ditulis sebagai bentuk kombinasi dari bilangan dan variabel. Sebagai contoh:

$x + x = 2x$

$x + x + x + x = 4x$

dan seterusnya. Sama halnya dengan bentuk berikut.

$2x^2 = x^2 + x^2$

Kombinasi bentuk aljabar juga dapat ditulis sebagai berikut.

$3x^2 + 2x$ atau $3x^2 - 2x$

Penulisan seperti di atas dinamakan bentuk aljabar, yaitu suatu bentuk matematika yang terdiri dari huruf dan angka yang dihubungkan oleh operasi hitung seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Pada bentuk $3x^2 - 2x$, bilangan 3 disebut koefisien dari x^2 dan -2 disebut koefisien dari x.

Pada beberapa bentuk aljabar, sering kali terdapat lebih dari satu variabel atau huruf yang berbeda. Sebagai ilustrasi, perhatikan bentuk aljabar berikut:

$x^2 - 3xy + 3y^2$

Pada bentuk aljabar tersebut, terdapat dua variabel yang berbeda, yaitu x dan y. Notasi xy menunjukkan bahwa kedua variabel tersebut saling dikalikan. Koefisien dari bentuk aljabar tersebut adalah 1 untuk x^2, -3 untuk xy, dan 3 untuk y^2. Bentuk aljabar tersebut tidak dapat disederhanakan lagi.

Contoh Soal

Sederhanakan bentuk aljabar berikut.

1. $3x + 5x + 2$
2. $5m + 3n - 2m + 4n$
3. $2a + 4 + b + a$
4. $2 \cdot 5y$
5. $(3x) \cdot (7x)$

Pembahasan:

1. Oleh karena terdapat satu variabel, yaitu x dan yang lainnya adalah bilangan, maka cara untuk menyederhanakan bentuk ini adalah dengan menggunakan hukum distributif $(a + b)c = ab + ac$. Jadi,

   $3x + 5x + 2 = (3 + 5)x + 2 = 8x + 2$
2. $5m + 3n - 2m + 4n = (5 - 2)m + (3 + 4)n$

   $= 3m + 7n$
3. $2a + 4 + b + a = (2 + 1)a + b + 4$

   $= 3a + b + 4$
4. Tulisan $2 \cdot 5y$ mempunyai arti sebagai berikut.

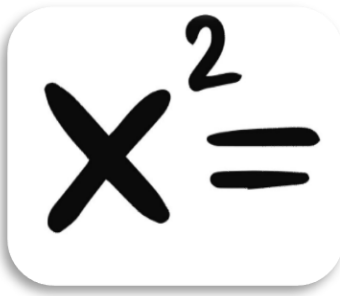
   $2 \cdot 5y = 5y + 5y = 10y$

   Untuk selanjutnya, dapat disederhanakan menjadi bentuk $2 \cdot 5y = 10y$, yaitu hasil dari perkalian dua bilangan 2 dan 5 menjadi 10 dan variabelnya tetap.
5. Dengan cara serupa

   $(3x) \cdot (7x) = (3 \cdot 7)(x \cdot x) = 21x^2$

Pojok Matematika

Asal Mula Penamaan Variabel "x"



- ▷ Penggunaan huruf "x" sebagai variabel dalam aljabar memiliki akar sejarah yang panjang dan menarik. Awalnya, matematikawan Arab menggunakan kata "شيء" (shay') yang berarti "sesuatu" untuk mewakili nilai yang tidak diketahui dalam perhitungan aljabar. Saat karya-karya aljabar Arab diterjemahkan ke dalam bahasa Latin pada abad ke-12, kata "شيء" sulit dilafalkan dalam bahasa Latin sehingga diterjemahkan menjadi "xay" atau "xei" sebagai upaya mendekati pelafalan kata aslinya.
- ▷ Seiring waktu, penulisan "xay" disingkat menjadi huruf "x" oleh para penyalin dan penerjemah Latin. Salah satu tokoh yang mempopulerkan penggunaan "x" adalah René Descartes dalam karyanya La Géométrie (1637), yang menggunakan huruf-huruf di akhir alfabet (x, y, z) untuk menyatakan nilai yang tidak diketahui, sedangkan huruf-huruf di awal alfabet (a, b, c) untuk nilai yang diketahui. Sistem ini dianggap praktis dan akhirnya diterima secara luas dalam pembelajaran aljabar di seluruh dunia.
- ▷ Penggunaan "x" sebagai variabel hingga saat ini menunjukkan bagaimana perkembangan bahasa, sejarah terjemahan, dan kebutuhan akan kepraktisan dalam notasi matematika membentuk simbol yang digunakan dalam aljabar modern. Huruf "x" bukan sekadar simbol acak, tetapi bagian dari jejak sejarah ilmu pengetahuan yang terus hidup dalam setiap soal aljabar yang dikerjakan di ruang kelas maupun dalam penerapan sehari-hari.

2. Penjumlahan dan Pengurangan Dua Bentuk Aljabar

Menjumlahkan Dua Bentuk Aljabar

Pengaplikasian Aljabar dalam Resep Makanan – Freepik.com

Penjumlahan bentuk aljabar hanya dapat dilakukan dengan suku-suku yang sejenis. Suku sejenis adalah suku-suku dalam bentuk aljabar yang memiliki variabel dan pangkat yang sama, yang membedakan hanyalah koefisiennya. Proses ini mengikuti prinsip yang sama seperti pada penyederhanaan, yaitu hanya suku-suku yang memiliki variabel dan pangkat yang sama yang dapat dijumlahkan.

Apabila a, b, dan c merupakan sembarang bilangan, secara umum berlaku

$a\,(bx + c) = a \cdot bx + a \cdot c$

Sifat ini adalah bentuk lain dari sifat distributif bilangan.

Contoh Soal

1. Jumlahkan bentuk aljabar $4x - 5$ dan $5x + 2$.
2. Tuliskan tanpa tanda kurung bentuk aljabar $-3(2x + 3)$.
3. Tentukan jumlah dari $-5x^2 + 9x + 2$ dan $6x^2 - 9x + 6$.

Pembahasan:

1. Jumlah dari kedua bentuk aljabar tersebut adalah

$$\begin{aligned}(4x - 5) + (5x + 2) &= 4x - 5 + 5x + 2\\ &= 4x + 5x - 5 + 2\\ &= 9x - 3\end{aligned}$$

2. Dengan menggunakan sifat distributif, maka

$$\begin{aligned}-3(2x + 3) &= -3 \cdot 2x + -3 \cdot 3\\ &= -6x - 9\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(-5x^2 + 9x + 2) + (6x^2 - 9x + 6) &= -5x^2 + 9x + 2 + 6x^2 - 9x + 6\\ &= -5x^2 + 6x^2 + 9x - 9x + 2 + 6\\ &= x^2 + 8\end{aligned}$$

Selisih Dua Bentuk Aljabar

Selisih dua bentuk aljabar a dan b merupakan bentuk $a - b$. Diketahui bahwa

$a - b = a + (-b) = a + [a + (-1)b]$

Dengan demikian, selisih dua bentuk aljabar $2x + 5$ dan $x + 3$ dapat ditentukan sebagai jumlah dari

$(2x + 5)$ dan $-(x + 3)$

atau

$$\begin{aligned}(2x + 5) - (x + 3) &= (2x + 5) + [-1(x + 3)] \\ &= 2x + 5 - x - 3 \\ &= x + 2\end{aligned}$$

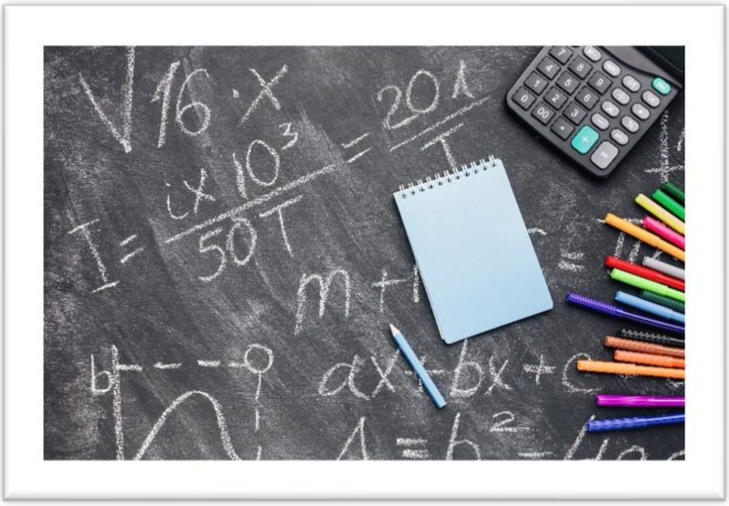
Contoh Soal

1. Hitunglah selisih dua bentuk aljabar $(7x + 5)$ dan $(3x - 2)$.
2. Hitunglah selisih dua bentuk aljabar $2x^2 + 5x + 7$ dan $x^2 + 3x + 2$.

Pembahasan:

1. $$\begin{aligned}(7x + 5) - (3x - 2) &= (7x + 5) + [-1(3x - 2)] \\ &= 7x + 5 - (3x + 2) \\ &= 7x + 5 - 3x - 2 \\ &= 7x - 3x + 5 - 2 \\ &= 4x + 3\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}(2x^2 + 5x + 7) - (x^2 + 3x + 2) &= (2x^2 + 5x + 7) + [-1\ (x^2 + 3x + 2)] \\ &= 2x^2 + 5x + 7 - (x^2 + 3x + 2) \\ &= 2x^2 + 5x + 7 - x^2 - 3x - 2 \\ &= 2x^2 - x^2 + 5x - 3x + 7 - 2 \\ &= x^2 + 2x + 5\end{aligned}$$

3. Perkalian Suku Dua Aljabar



Ilustrasi Matematika – Freepik

Perkalian dua suku aljabar dilakukan dengan cara mengalikan koefisien serta variabel dari dua suku. Operasi ini juga melibatkan penjumlahan pangkat variabel yang sama sesuai dengan aturan eksponen:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Perkalian dua suku aljabar digunakan untuk menghitung hasil dari bentuk seperti:

$(3a + 2b)(2a + b)$

Aturan yang digunakan adalah sifat distributif $a(b + c) = ab + ac$. Oleh karena itu,

$(3a + 2b)(2a + b) = (3a + 2b)(5a) + (3a + 2b)(b) \rightarrow$ sifat distributif

$= (2a)(3a + 2b) + (b)(3a + 2b) \rightarrow$ sifat komutatif

$= (2a)(3a) + (2a)(2b) + (b)(3a) + (b)(2b) \rightarrow$ sifat distributif

$= 6a^2 + 4ab + 3ab + 2b^2$

$= 6a^2 + 7ab + 2b^2$

Apabila terdapat dua bentuk umum seperti $(ax + by)(cx + dy)$ maka hasilnya diperoleh:

$$(ax + by)(cx + dy) = cx(ax + by) + dy(ax + by)$$

Contoh Soal

Tuliskan tanpa menggunakan tanda kurung dan sederhanakan

1. $2x(x - 7) + x(3x + 2)$
2. $3x(x + 3y) - 5y(7x - 2y)$

Pembahasan:

1. $2x(x - 7) + x(3x + 2) = 2x \cdot x + 2x \cdot (-7) + x \cdot 3x + x \cdot 2$
$= 2x^2 + (-14x) + 3x^2 + 2x$
$= 2x^2 - 14x + 3x^2 + 2x$
$= 2x^2 + 3x^2 - 14x + 2x$
$= 5x^2 - 12x$
2. $3x(x + 3y) - 5y(7x - 2y) = 3x \cdot x + 3x \cdot 3y + (-5y) \cdot 7x + (-5y) \cdot (-2y)$
$= 3x^2 + 9xy + (-35xy) + 10y^2$
$= 3x^2 - 26xy + 10y^2$

Pojok Matematika

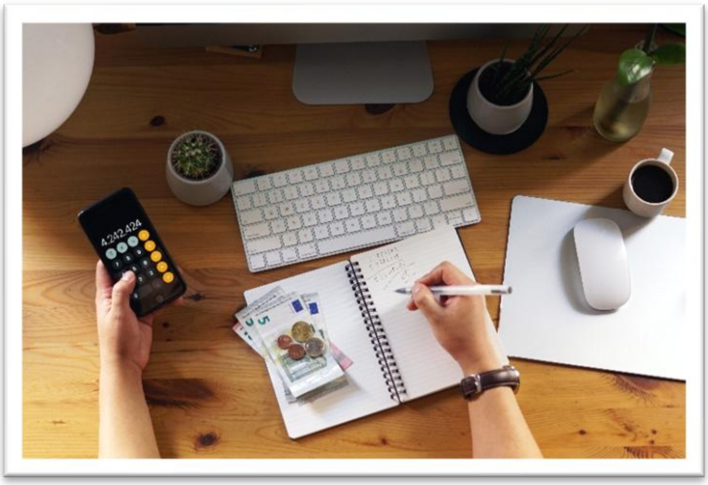
Al-Khwarizmi : Bapak Aljabar

- ▷ Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi adalah seorang ilmuwan Persia pada abad ke-9 yang dikenal sebagai "Bapak Aljabar" karena kontribusinya dalam pengembangan metode pemecahan persamaan. Karyanya yang paling terkenal berjudul Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala, yang berarti "Kitab Ringkasan Perhitungan dengan Penyelesaian dan Penyeimbangan". Buku ini berisi penjelasan sistematis tentang cara menyelesaikan persamaan linier dan kuadrat secara langkah demi langkah, sehingga memudahkan penerapan dalam kehidupan sehari-hari pada masa itu, seperti perhitungan warisan, pembagian tanah, dan perhitungan perdagangan.
- ▷ Kata "aljabar" berasal dari kata "al-jabr" yang terdapat dalam judul buku tersebut, yang berarti "penyatuan" atau "pemulihan". Istilah ini merujuk pada teknik memindahkan suku dalam persamaan untuk menyederhanakan bentuknya, seperti memindahkan suku negatif ke sisi lain agar menjadi positif. Istilah "al-jabr" kemudian diadopsi ke dalam bahasa Latin sebagai "algebra" dan tersebar ke seluruh Eropa sebagai nama cabang ilmu yang mempelajari operasi bilangan dan variabel dalam bentuk simbol.
- ▷ Melalui karyanya, al-Khwarizmi memberikan landasan penting bagi perkembangan matematika, khususnya dalam penggunaan metode sistematis untuk menyelesaikan masalah dengan persamaan. Selain itu, karya al-Khwarizmi juga menjadi rujukan penting dalam penerjemahan ilmu pengetahuan dari dunia Islam ke Eropa, yang kemudian menjadi dasar perkembangan matematika modern. Oleh sebab itu, peran al-Khwarizmi menjadi salah satu tonggak sejarah yang menjadikan aljabar sebagai bagian penting dalam pembelajaran matematika hingga saat ini.

4. Pemfaktoran

Pemfaktoran adalah proses mengubah suatu bentuk aljabar menjadi bentuk perkalian dari faktor-faktor penyusunnya. Cara untuk melakukan pemfaktoran adalah dengan membalik proses perkalian. Perhatikan contoh berikut.

Menggunakan sifat distributif $ac + bc = (a + b)c$.



Seseorang sedang Berhitung dengan Kalkulator – Freepik

Pemfaktoran Suku Empat

Misalkan terdapat bentuk aljabar suku empat.

$ac - bc + 2a - 2b$

Untuk memfaktorkan bentuk dengan empat suku, kelompokkan tiap dua suku yang memiliki faktor yang sama. Dalam hal ini ac dengan –bc serta 2a dan –2b. Jadi

$$\begin{aligned} ac - bc + 2a + 2b &= c(a - b) + 2(a - b) \\ &= (c + 2)(a - b) \\ &= (a - b)(c + 2) \end{aligned}$$

Terdapat pula metode lain, yaitu dengan menyusun ulang menjadi:

$$\begin{aligned} ac - bc + 2a - 2b &= ac + 2a - bc - 2b \\ &= a(c + 2) - b(c + 2) \\ &= (a - b)(c + 2) \end{aligned}$$

Kedua pengerjaan tersebut mempunyai hasil yang sama walaupun berbeda cara menyelesaikannya.

Pemfaktoran Suku Tiga

Pemfaktoran bentuk kuadrat suku tiga dapat dipahami melalui proses perkalian dua bentuk binomial. Sebagai contoh:

$$\begin{aligned} (a + 2)(a + 1) &= a^2 + a + 2a + 2 \\ &= a^2 + 3a + 2 \end{aligned}$$

yang menghasilkan bentuk suku tiga. Koefisien suku a diperoleh dari hasil penjumlahan bilangan di ruas kiri, 2 + 1, dan bilangan terakhir (konstanta) diperoleh dari hasil perkalian bilangan di ruas kiri, $2 \cdot 1$.

Jika diketahui $a^2 + 3a + 2$, maka proses pemfaktoran dilakukan dengan mencari dua bilangan bulat c dan d yang memenuhi:

$a^2 + 3a + 2 = (a + c)(a + d)$

sehingga jumlah c dan d adalah 3 dan hasil kali c dan d adalah 2. Pada umumnya, pencarian bilangan ini hanya dilakukan pada bilangan bulat saja.

Karena jumlah bilangan dan hasil kali bernilai positif, maka kedua bilangan tersebut merupakan bilangan positif yang masing-masing harus kurang dari 2. Dalam hal ini, 1 dan 2 adalah pasangan yang sesuai. Sehingga diperoleh hasil pemfaktoran:

$$\begin{aligned} a^2 + 3a + 2 &= (a + 1)(a + 2) \\ &= (a + 2)(a + 1) \end{aligned}$$

Bilangan tersebut merupakan faktor dari bilangan (konstanta) suku semula.

Contoh Soal

Faktorkan bentuk berikut.

1. Faktorkan bentuk $a^2 + 12a + 36$.
2. Tuliskan tanpa tanda kurung $(x - 2)(x - 3)$

Pembahasan:

1. Bilangan c dan d pada $a^2 + 12a + 36 = (a + c)(a + d)$ harus dicari sehingga jumlahnya 12 dan hasil kalinya 36. Pencarian bilangan ini hanya dilakukan pada bilangan bulat saja.

   Oleh karena jumlah dan hasil kalinya merupakan bilangan bertanda positif, maka kedua bilangan tersebut haruslah bertanda positif. Faktor dari 36 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, dan 36. Sementara dua faktor yang jumlahnya 12 dan hasilnya 36 adalah 6 dan 6. Jadi,

   $a^2 + 12a + 36 = (a + 6)(a + 6)$
2. Untuk menyederhanakan bentuk $(x - 2)(x - 3)$, gunakan sifat distributif.

   $$\begin{aligned} (x - 2)(x - 3) &= x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= x^2 - 3x - 2x + 6 \\ &= x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

a. Pemfaktoran suku tiga untuk koefisien x^2 bernilai satu

Untuk bentuk aljabar seperti $a^2 + a - 2$, proses pemfaktoran dilakukan dengan mencari dua bilangan c dan d yang memenuhi:

$a^2 + a - 2 = (a + c)(a + d)$

sehingga jumlahnya 1 dan hasil kalinya sama dengan –2. Karena hasil kalinya bernilai negatif, maka kedua bilangan berbeda tanda. Diketahui faktor dari 2 adalah 1 dan 2, sehingga kemungkinan pasangan adalah

1 dan –2 atau –1 dan 2

Oleh karena jumlahnya positif, maka dipilih –1 dan 2. Jadi,

$a^2 + a - 2 = (a - 1)(a + 2)$

Hasil ini dapat diverifikasi dengan mengalikan kembali kedua faktor.

b. Pemfaktoran suku tiga untuk koefisien x^2 bernilai tidak satu

Pada bagian sebelumnya, pemfaktoran suku tiga dibahas untuk bentuk dengan koefisien $x^2 = 1$. Kali ini dibahas bentuk umum:

$$ax^2 + bx + c$$

koefisien dari x^2 tidak harus bernilai 1.

Dalam beberapa kasus dengan memfaktorkan a, cara tersebut dapat digunakan kembali. Sebagai contoh

$3x^2 + 9x + 6 = 3(x^2 + 3x + 2) = 3(x + 2)(x + 1)$

Untuk bentuk yang lebih umum, sebagai contoh akan diuraikan bentuk aljabar $3x^2 + 5x + 2$. Hasil pemfaktoran yang mungkin adalah:

$3x^2 + 5x + 2 = (3x + c)(x + d)$

Diketahui $(3x + c)(x + d) = 3x^2 + (3 \cdot d + c)x + (c \cdot d)$. Jadi hasil kali bilangan c dan d adalah 2. Karena hasil kali dan jumlah koefisien positif, maka bilangan yang dicari keduanya merupakan bilangan positif. Jadi, kemungkinannya adalah 1 dan 2. Akan tetapi, dengan meletakkan bilangan 1 dan 2, diperoleh

$(3x + 1)(x + 2) = 3x^2 + 7x + 2$

Hasil tersebut tidak sama dengan pemfaktoran yang diinginkan. Selanjutnya, tukar letak bilangan 1 dan 2 sehingga diperoleh

$(3x + 2)(x + 1) = 3x^2 + 5x + 2$

Hasil tersebut sesuai dengan pemfaktoran yang dicari. Jadi, $3x^2 + 5x + 2 = (3x + 2)(x + 1)$.

Bentuk aljabar tersebut dapat difaktorkan dengan cara lain. Kalikan bentuk aljabar $(3x^2 + 5x + 2)$ dengan koefisien x^2, yaitu 3, dan agar tidak mengubah bentuk maka juga dengan inversnya. Diperoleh

$$\begin{aligned}
3x^2 + 5x + 2 &= \left(\tfrac{1}{3}\right)(9x^2 + 15x + 6) \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right)(3x + c)(3x + d) \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right)[9x^2 + (3 \cdot d + 3 \cdot c)x + c \cdot d]
\end{aligned}$$

Keuntungan bentuk terakhir adalah perlakuan yang sama antara kedua bilangan. Selanjutnya, harus mencari bilangan c dan d sehingga hasil kalinya sama dengan 6 dan 3 kali jumlahnya adalah 15 atau jumlahnya sama dengan 5.

Seperti kasus sebelumnya, diperoleh angka 2 dan 3. Dengan meletakkan kedua bilangan, sehingga

$$\begin{aligned}
3x^2 + 5x + 2 &= \left(\tfrac{1}{3}\right)(3x + 313x + 2) \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right) \cdot 3(x + 1)(3x + 2) \\
&= (x + 1)(3x + 2)
\end{aligned}$$

Hasil yang diperoleh sama dengan cara sebelumnya.

Angka hasil kali bilangan yang dicari, diperoleh dari perkalian antara koefisien x^2 dengan konstanta, yaitu $3 \cdot 2 = 6$, sedangkan jumlah bilangan yang dicari diperoleh dari koefisien x seperti hasil awal, yaitu 5.

Pojok Matematika

Penerapan Tarif Ojek Online

- Penerapan aljabar dalam perhitungan tarif ojek online terjadi ketika sistem menentukan total biaya perjalanan berdasarkan jarak tempuh dan biaya tetap. Biaya tetap biasanya merupakan tarif dasar yang dikenakan tanpa memandang jarak, sedangkan biaya per kilometer dihitung sesuai dengan jarak yang ditempuh. Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan aljabar $T = a + bx$, dengan T sebagai total tarif, a sebagai biaya tetap, b sebagai tarif per kilometer, dan x sebagai jarak tempuh. Melalui persamaan ini, proses perhitungan tarif menjadi sistematis dan memudahkan perusahaan untuk menetapkan harga secara transparan kepada pengguna.
- Selain mempermudah penetapan tarif, aljabar juga digunakan untuk menghitung estimasi biaya perjalanan pada berbagai kondisi, seperti adanya promo potongan harga atau biaya tambahan pada jam sibuk. Misalnya, jika terdapat potongan harga sebesar Rp5.000, maka persamaan tarif dapat disesuaikan menjadi $T = a + bx - 5.000$. Sebaliknya, apabila terdapat biaya tambahan pada jam sibuk sebesar Rp3.000, persamaan menjadi $T = a + bx + 3.000$. Penggunaan variabel dalam persamaan aljabar ini membantu sistem ojek online mengelola berbagai skema harga secara fleksibel.
- Dalam pengembangan aplikasi ojek online, algoritma penentuan tarif menggunakan konsep aljabar untuk melakukan perhitungan secara otomatis dan cepat ketika pengguna memesan layanan. Sistem akan membaca data lokasi penjemputan dan tujuan, menghitung jarak menggunakan sistem koordinat, lalu menerapkannya pada persamaan tarif. Dengan demikian, konsep aljabar menjadi bagian penting dalam mendukung kemudahan layanan transportasi daring yang digunakan setiap hari.

5. Pecahan Aljabar

Konsep Aljabar pada Transaksi Sehari-hari – Freepik

Menyederhanakan Pecahan Aljabar

Jika suatu pecahan $\left(\frac{p}{q}\right)$ diketahui, maka dapat dilakukan perkalian terhadap pembilang (bilangan di atas) dan penyebut (bilangan di bawah) dengan bilangan tak nol yang sama tanpa mengubah nilai pecahan tersebut. Secara umum, jika a ≠ 0, maka berlaku:

$$\frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{a \cdot q}$$

Artinya, nilai pecahan tetap setara meskipun pembilang dan penyebut dikalikan dengan bilangan yang sama. Prinsip ini juga berlaku dalam operasi pembagian, yaitu dengan membagi pembilang dan penyebut menggunakan bilangan yang sama (selama bukan nol), sehingga pecahan dapat disederhanakan.

Misalnya diketahui pecahan $\frac{12}{60}$. Dengan memfaktorkan kedua bilangan (pembilang dan penyebut), maka diperoleh

$$\frac{10}{60} = \frac{1 \times 10}{6 \times 10} = \frac{1}{6}$$

Prinsip serupa dapat diterapkan dalam pecahan bentuk aljabar. Untuk menyederhanakan pecahan aljabar, pembilang dan penyebut perlu dibagi dengan faktor yang sama, baik berupa bilangan maupun bentuk aljabar, agar diperoleh bentuk paling sederhana dari pecahan tersebut.

Contoh Soal

1. Sederhanakan bentuk $\frac{3x-6}{2}$.

   Pembahasan:

   Pembilang dari bentuk aljabar dapat ditulis sebagai

   $$\begin{aligned}\frac{3x-6}{2} &= \frac{2(x-3)}{2}\\ &= \frac{x-3}{1}\\ &= x-3\end{aligned}$$

2. Faktorkan bentuk $a^2 - b^2$ dan sederhanakan bentuk $\frac{(2x+y)^2-(3x-y)^2}{x^2+xy-6y^2}$.

   Pembahasan:

   Pembilang dari bentuk aljabar merupakan selisih dua kuadrat, sehingga menggunakan rumus $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Dalam hal ini, $a = 2x + y$ dan $b = 3x - y$. Jadi,

   $$\begin{aligned}(2x+y)^2-(3x-y)^2 &= [(2x+y)-(3x-y)][(2x+y)+(3x-y)]\\ &= (2x+y-3x+y)(2x+y+3x-y)\\ &= (-x+2y)(5x)\end{aligned}$$

   Penyebut dari bentuk aljabar tersebut ditulis sebagai pemfaktoran:

   $x^2 + xy - 6y^2 = (x + 3y)(x - 2y)$

   Setelah digabungkan hasil pemfaktoran pembilang dan penyebut, maka

   $$\begin{aligned}\frac{(2x+y)^2-(3x-y)^2}{x^2+xy-6y^2} &= \frac{(-x+2y)(5x)}{(x+3y)(x-2y)}\\ &= \frac{-(x-2y)(5x)}{(x+3y)(x-2y)}\\ &= \frac{-5x}{(x+3y)}\end{aligned}$$

Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan Aljabar

Penjumlahan dan pengurangan pecahan aljabar mengikuti prinsip yang sama seperti pada pecahan bilangan biasa. Operasi hanya dapat dilakukan secara langsung jika penyebutnya sama. Sebagai contoh:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Namun, apabila terdapat penjumlahan dengan penyebut berbeda, penyebutnya harus disamakan terlebih dahulu. Sebagai contoh:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{1}{4} &= \frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4}\\ &= \frac{2}{12}+\frac{3}{12}\\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

dan apabila diperlukan, sederhanakan hasil yang diperoleh.

Hal yang sama juga berlaku pada bentuk pecahan aljabar.

Penyamaan penyebut tidak perlu harus menggunakan perkalian dari semua penyebut, melainkan dapat menggunakan bentuk yang lebih sederhana atau lebih kecil yaitu dengan bilangan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK).

Perkalian dan Pembagian Pecahan Aljabar

Aturan perkalian atau pembagian dua pecahan aljabar sama dengan aturan pada bilangan pecahan. Perhatikan contoh bilangan pecahan berikut,

yaitu pembilang kali pembilang dan penyebut kali penyebut.

Dengan memfaktoran terlebih dahulu, perkalian menjadi lebih sederhana.

Misalkan terdapat suatu kasus terdapat suku yang sama pada pembilang dan penyebut, sebaiknya melakukan penyederhanaan terlebih dahulu.

6. Persamaan dan Bentuk Aljabar

Penerapan Aljabar pada Belanja Barang – Freepik

Persamaan aljabar, suatu ekspresi yang menghubungkan dua bentuk aljabar dengan tanda sama dengan (=). Persamaan ini dapat berisi variabel yang nilainya harus dicari agar kedua ekspresi tersebut menjadi setara. Persamaan yang paling sederhana berbentuk

$ax + b = c$

dengan $a \neq 0$, b dan c merupakan bilangan sembarang. Sebagai contoh persamaan aljabar,

$2x + 3 = 7$

Dalam hal ini, dicari nilai x yang membuat persamaan ini benar. Penyelesaian dari persamaan ini akan menghasilkan nilai x yang merupakan solusi dari persamaan tersebut.

Jika diketahui pecahan $\frac{p}{q} = 0$, dapat disimpulkan bahwa $p = 0$ dan $q \neq 0$.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan operasi aljabar diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang bagaimana penyederhanaan, penjumlahan, pengurangan, dan pecahan aljabar. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Sebagai ganti bilangan, digunakan abjad yaitu a, b, c, ... yang disebut sebagai variabel.
2) Untuk memudahkan penulisan, lakukan penyederhanaan. Misalkan untuk penjumlahan

   $x + x + x = 3x$

   $3x + 2x = 5x$

   dan perkalian

   $x \cdot x = x^2$

   $x \cdot x \cdot x = x^3$

   $x^3 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$

3) Operasi hitung (tambah, kurang, kali, bagi) pada bentuk aljabar serupa dengan operasi hitung pada bilangan.
4) Dalam perhitungan, sering kali lebih mudah jika mengingat bentuk perkalian:
   - ▷ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
   - ▷ $(x – y) = x^2 – 2xy + y^2$
   - ▷ $(x – y)(x + y) = x^2 – y^2$

   dan kebalikannya, yaitu:
   - ▷ $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
   - ▷ $x^2 – 2xy + y^2 = (x – y)^2$
   - ▷ $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y)$
5) Pemfaktoran atau uraian.

   Suatu bentuk aljabar seringkali dapat ditulis dalam bentuk perkalian. Misalkan

   $$5x^2 – xy – 12y^2 = (px + qy)(rx + sy)$$

   dengan p, q, r, dan s adalah bilangan yang harus ditentukan.
6) Operasi hitung pecahan

   Penggunaan operasi hitung pada pecahan aljabar serupa dengan penggunaan operasi hitung pada bilangan
   - ▷ Penyederhanaan pecahan

     $\frac{a}{b} = \frac{ap}{bp}$

     pembilang dan penyebut pecahan aljabar dapat dikalikan dengan bentuk aljabar tak nol yang sama, dan

     $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{p}}{\frac{b}{p}}$

     pembilang dan penyebut pecahan aljabar dapat dibagi dengan bentuk aljabar tak nol yang sama.

- ▷ Penjumlahan

  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \;=\; \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ (samakan penyebut)

  $= \frac{ad + bc}{bd}$ (jumlahkan pembilang)

- ▷ Pengurangan

  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \;=\; \frac{a}{b} + \left(\frac{-c}{d}\right) = \frac{ad - bc}{bd}$

  $= \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{-d}\right) = \frac{bc - ad}{-bd}$

- ▷ Perkalian

  $\boldsymbol{\frac{a}{b}} \times \boldsymbol{\frac{c}{d}} = \boldsymbol{\frac{ac}{bd}}$

  pembilang kali pembilang, penyebut kali penyebut.

- ▷ Pembagian

  $\boldsymbol{\frac{a}{b}} \div \boldsymbol{\frac{c}{d}} = \boldsymbol{\frac{a}{b}} \times \boldsymbol{\frac{d}{c}}$

  diubah menjadi bentuk perkalian.

7) Pada perhitungan seringkali lebih sederhana jika dilakukan dalam bentuk faktor.

Latihan Soal

1. Variabel dari bentuk aljabar $2a + 3b - 5$ adalah ...

   a. p dan q
   b. 2 dan 3
   c. -5
   d. a dan b
   e. 3 dan -5

2. Hasil penjumlahan $x - 5y - 3z$ dengan $-3x + 2y + 5z$ adalah ...

   a. $-2x - 3y + 2z$
   b. $2x - 3y + 2z$
   c. $-2x - 3y - 2z$
   d. $2x + 3y + 2z$
   e. $2x - 3y - 2z$

3. Penyederhanaan dari bentuk $3x^2 + x - 5 + 7 - 3x - 2x^2$ adalah ...

   a. $x^2 - 2x + 2$
   b. $x^2 + 2x + 2$
   c. $-x^2 + 2x - 2$
   d. $x^2 + 2x - 2$
   e. $-x^2 - 2x + 2$

4. Bentuk sederhana dari $3(2p - 5) - 2(2p - 7)$ adalah ...

   a. $2p + 1$
   b. $6p + 1$
   c. $4p + 29$
   d. $6p + 2$
   e. $2p - 1$

5. Diketahui $9x^2 - 8x + 15 = 3ax^2 + 4bx + 3c$ Nilai dari $a + b + c$ adalah ...

   a. 2
   b. 4
   c. 6
   d. 8
   e. 10

6. Nilai dari $\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x}$ adalah ...

   a. $\frac{5}{6x}$
   b. $\frac{13}{6x^2}$
   c. $\frac{13}{6x}$
   d. $\frac{12}{6x}$
   e. $\frac{5}{5x}$

7. $\frac{2x-1}{4} - \frac{4x+2}{3} = \cdots$

   a. $\frac{10x-11}{12}$
   b. $\frac{-10x+11}{12}$
   c. $\frac{-10x-11}{12}$
   d. $\frac{10x+11}{12}$
   e. $\frac{-10x+11}{24}$

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 9 BAB 1

Referensi

Ariyanto, A., & Putri, R. (2019). Penerapan Sistem Penentuan Tarif Ojek Online dengan Menggunakan Algoritma Dynamic Pricing. Jurnal Teknologi Informasi dan Komunikasi, 12(1), 45-58.

Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Hosseini, S. (2011). Al-Khwarizmi and the Origins of Algebra. Mathematical Review, 15(2), 121-130.

Rashed, R. (2009). Al-Khwarizmi: The Father of Algebra. Springer.

Sutrisno, I. (2015). Aljabar Dasar dan Operasi Aljabar. Jakarta: Erlangga.

Thomas, G. B., & Finney, R. L. (2008). Calculus and Analytic Geometry (9th ed.). Boston: Addison-Wesley.

Tucker, A. (2007). The Origins of the Use of 'X' in Algebra. Mathematics Magazine, 80(4), 232-234.

BAB 2

BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Bernalar Kritis**

Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika yang melibatkan bilangan berpangkat dan notasi ilmiah.

Kata Kunci: Bilangan Berpangkat, Bentuk Akar, Operasi Aljabar

Tujuan Pembelajaran: Menjelajahi Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar

1. **Memahami pengertian bilangan berpangkat dan notasi ilmiah.**
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep bilangan berpangkat.
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep notasi ilmiah dalam matematika.

2. **Menyelesaikan persoalan terkait operasi operasi hitung bilangan berpangkat positif dan negatif.**
   - ▷ Menggunakan operasi hitung untuk menyelesaikan berbagai kasus bilangan berpangkat.
   - ▷ Memahami perbedaan bilangan berpangkat bilangan bulat positif dan negatif.

3. Mendefinisikan arti bentuk akar.

- ▷ Mengidentifikasi berbagai bentuk akar dalam matematika.
- ▷ Menerapkan operasi hitung bentuk akar.

4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bilangan berpangkat dan notasi ilmiah.

- ▷ Mengembangkan model matematika untuk menyelesaikan masalah bilangan berpangkat dan notasi ilmiah dalam kehidupan sehari-hari.
- ▷ Menerapkan teori matematika dalam berbagai permasalahan yang ditemui di kehidupan nyata.

1. Pengertian Bilangan Berpangkat

Bilangan Berpangkat

Suatu bentuk bilangan yang diperoleh dari hasil perkalian berulang suatu bilangan dengan dirinya sendiri dinamakan bilangan berpangkat. Bilangan berpangkat digunakan untuk menyederhanakan penulisan perkalian bilangan yang sama. Contoh:

$a^2 = a \times a$

$a^3 = a \times a \times a$

$\quad = a^2 \times a = a \times a^2$

$a^n = a^{n-1} \times a$

$\quad = a \times a^{n-1}$

dengan n merupakan bilangan asli.

$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a,\ a \neq 0$

Bilangan a^n disebut bilangan berpangkat dengan a disebut basis dan n disebut pangkat.

Contoh Soal

Tentukan nilai dari setiap bilangan berpangkat berikut.

1. $(4)^3$
2. $(0,2)^3$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

Pembahasan:

1. $(4)^3 = (4) \times (4) \times (4)$
   $= 16 \times (4)$
   $= 64$
2. $(0,2)^3 = (0,2) \times (0,2) \times (0,2)$
   $= (0,04) \times (0,2)$
   $= (0,008)$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)$
   $= \left(\frac{1}{9}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)$
   $= \frac{1}{27}$

Operasi Aljabar Bilangan Berpangkat

Ilustrasi Bilangan Berpangkat – Freepik

Contoh Soal

Hitung perkalian dan pembagian bilangan berpangkat berikut.

1. $6^3 \times 6^2$
2. $8^6 \times 8^{11}$
3. $\frac{4^8}{4^5}$
4. $(2^3 \times 3^2)^3$

Pembahasan:

1. Oleh karena $6^3 = 6 \times 6 \times 6$ dan $6^2 = 6 \times 6$, maka

   $6^3 \times 6^2 = (6 \times 6 \times 6) \times (6 \times 6)$

   $= 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

   $= 6^5$

2. Dengan cara seperti di atas, maka:

   $8^6 \times 8^{11} = 8 \times \ldots \times 8 \times 8 \times \ldots \times$

   $= 8 \times \ldots \times 8$ *(sebanyak 17 kali)*

   $= 8^{17}$

3. Dengan cara yang sama, maka:

   $\frac{4^8}{4^5} = \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$

   $= 4 \times 4 \times 4$

   $= 4^3$

4. $(2^3 \times 3^2)^3 = (2^3 \times 3^2) \times (2^3 \times 3^2) \times (2^3 \times 3^2)$

   $= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

   $= 2^9 \times 3^6$

Berdasarkan beberapa soal, dapat dibuktikan bahwa:

1) Apabila terdapat bilangan a berpangkat n dipangkatkan oleh m, maka berlaku sifat perpangkatan sebagai berikut.

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

dengan m dan n bilangan asli.

2) Apabila terdapat perkalian dua bilangan a dan b, yang masing-masing dipangkatkan oleh m, maka berlaku sifat perpangkatan berikut:

$$(ab)^m = a^m b^m$$

dengan m bilangan asli.

3) Apabila terdapat pembagian antara bilangan a dan b yang dipangkatkan oleh m, maka berlaku sifat perpangkatan berikut:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

dengan m bilangan asli dan b ≠ 0.

4) Kuadrat dari jumlah dua bilangan tidak sama dengan jumlah kuadrat dari dua bilangan tersebut, yang dapat ditulis sebagai:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

Pojok Matematika

Bilangan Berpangkat dalam Skala Peta

- ▷ Skala peta menunjukkan perbandingan jarak pada peta dengan jarak sebenarnya di permukaan bumi. Saat skala peta diperbesar atau diperkecil, perhitungan luas wilayah pada peta tidak hanya berubah secara linear, tetapi mengikuti bilangan berpangkat dua. Hal ini terjadi karena penghitungan luas melibatkan dua dimensi, yaitu panjang dan lebar, sehingga jika panjang peta dikalikan dua kali lipat, luasnya menjadi empat kali lipat.
- ▷ Misalnya, sebuah peta memiliki skala 1:50.000, artinya 1 cm pada peta mewakili 50.000 cm di lapangan. Jika ingin menggambar ulang peta dengan skala dua kali lebih besar menjadi 1:25.000, maka panjang pada peta akan menjadi dua kali lebih panjang, sedangkan luas wilayah pada peta akan menjadi empat kali lebih besar. Prinsip bilangan berpangkat ini juga digunakan saat menghitung luasan wilayah menggunakan peta, sehingga perhitungan area dapat disesuaikan dengan tepat mengikuti perubahan skala.
- ▷ Penggunaan bilangan berpangkat dalam skala peta membantu dalam memahami bagaimana perubahan skala memengaruhi panjang dan luas pada peta. Hal ini juga mempermudah pekerjaan dalam pemetaan wilayah, pengukuran area sawah dan hutan, serta membantu perencanaan pembangunan agar data jarak dan luas yang digunakan tetap akurat dan sesuai kondisi sebenarnya.

2. Bilangan Berpangkat Negatif

Pengertian Bilangan Berpangkat Negatif

Diketahui sifat bilangan berpangkat:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

Jika m > n, pada pembagian bilangan berpangkat dilakukan pengurangan dari pangkat-pangkat yang ada. Sebaliknya, jika m < n, maka ini yang dinamakan bilangan berpangkat negatif.

Apabila n merupakan bilangan asli dan $a \neq 0$, maka:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Berdasarkan sifat bilangan berpangkat sebelumnya, diperoleh:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$a^{n-n} = 1$$

$$a^0 = 1, \text{ jika } a \neq 0$$

Artinya jika $a \neq 0$, maka $a^0 = 1$.

Operasi Aljabar Bilangan Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Operasi aljabar bilangan berpangkat negatif dapat dikembalikan ke pangkat positif. Pada perkalian bilangan dengan pangkat negatif berlaku seperti pada pangkat positif, yaitu pangkat dijumlahkan dan basis tetap.

Contoh Soal

Tuliskan bentuk perkalian dan pembagian berikut sebagai satu bilangan berpangkat.

1. $3^{-5} \times 3^{-2}$
2. $\frac{2^2}{2^{-6}}$
3. $(3^5)^{-2}$

Pembahasan:

1. $3^{-5} \times 3^{-2} = \frac{1}{3^5} \times \frac{1}{3^2}$

   $= \frac{1}{3^5 \times 3^2}$

   $= \frac{1}{3^7}$

   $= 3^{-7}$

2. $\frac{2^2}{2^{-6}} = \frac{2^2}{\frac{1}{2^6}}$

   $= 2^2 \times 2^6$

   $= 2^8$

3. Dengan menggunakan arti bilangan berpangkat, maka:

   $(3^5)^{-2} = \frac{1}{(3^5)^2}$

   $= \frac{1}{3^{10}}$

   $= 3^{-10}$

Pengaplikasian Bilangan Berpangkat dalam Grafik Penggunaan Energi – Freepik

Berdasarkan beberapa soal, dapat dibuktikan bahwa:

a. Perkalian dari bilangan berpangkat dengan basis sama artinya pangkat dijumlahkan dan basis tetap.

$$a^p \times a^q = a^{p = q}$$

dengan p dan q merupakan bilangan bulat.

b. Pembagian dari bilangan berpangkat dengan basis sama berarti pangkat dikurangkan dan basis tetap

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p - q}$$

dengan p dan q bilangan bulat dan a ≠ 0.

c. Perpangkatan dari bilangan berpangkat adalah pangkat dikalikan dan basis tetap.

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

dengan p dan q bilangan bulat.

d. Perpangkatan dari perkalian (pembagian) adalah perkalian (pembagian) dari masing-masing bilangan setelah dipangkatkan.

$$(ab)^p = a^p\,b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

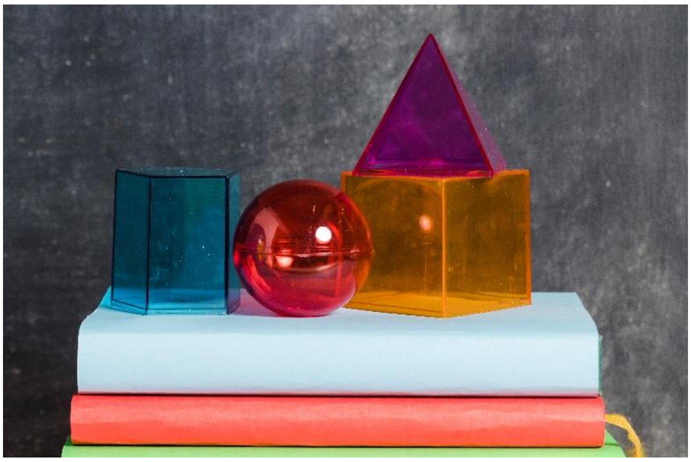
dengan p bilangan bulat dan b ≠ 0.

Pojok Matematika

Kalender Astronomi dan Akar Kuadrat

- Penentuan kalender astronomi di India kuno melibatkan perhitungan posisi matahari dan bulan dengan akurasi yang cukup tinggi pada masanya. Akar kuadrat digunakan untuk menghitung jarak antara benda langit serta lamanya revolusi bulan mengelilingi bumi, yang menjadi dasar perhitungan kalender lunar. Melalui perhitungan ini, masyarakat dapat menentukan awal bulan, waktu pergantian musim, dan hari-hari penting untuk kegiatan pertanian serta ritual keagamaan.
- Metode perhitungan yang digunakan tertuang dalam Surya Siddhanta, salah satu naskah astronomi India, yang menjelaskan penggunaan akar kuadrat dalam menghitung jari-jari lintasan planet dan menghitung kecepatan gerak semu benda langit. Perhitungan jarak dan kecepatan ini memanfaatkan prinsip segitiga siku-siku yang membutuhkan akar kuadrat untuk menemukan nilai sisi miring dari pengamatan bayangan matahari atau bulan pada waktu tertentu. Langkah ini menjadi penting untuk menentukan waktu gerhana, solstis, dan ekuinoks secara lebih akurat.
- Penggunaan akar kuadrat dalam kalender astronomi kuno ini membuktikan bahwa konsep matematika sederhana dapat berperan besar dalam penentuan waktu dan pengaturan kehidupan masyarakat. Dengan cara ini, masyarakat dapat mengatur musim tanam dan panen dengan tepat, menyesuaikan waktu perayaan keagamaan, serta memahami pola alam secara ilmiah. Penerapan ini menunjukkan bagaimana akar kuadrat telah membantu peradaban mengatur waktu secara sistematis jauh sebelum ditemukannya instrumen pengukur waktu modern.

3. Bilangan Berpangkat Pecahan



Bilangan Berpangkat untuk Menghitung Volume Bangun Ruang – Freepik

Pengertian Bilangan Berpangkat Pecahan

Diketahui bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$, untuk m dan n bilangan bulat. Hal ini berlaku pula untuk pangkat pecahan. Menurut sifat tersebut, maka:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a$$

artinya bahwa bilangan a dengan pangkat setengah yang dipangkatkan dua akan kembali menjadi a. Hal ini juga berlaku untuk bilangan negatif, yaitu $\left(-a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a$. Dalam hal ini terdapat dua pilihan mengenai tanda, $a^{\frac{1}{2}}$ yang bernilai positif.

Contoh Soal

Tentukan nilai dari $81^{\frac{1}{2}}$.

Pembahasan:

Nilai $81^{\frac{1}{2}}$ merupakan bilangan yang dikuadratkan kembali menjadi 81. Oleh karena $9^2 = 81$, maka $81^{\frac{1}{2}} = 9$.

Perhatikan bahwa $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, yaitu a merupakan kuadrat suatu bilangan. Artinya, a harus bernilai positif. Apabila a = –81, maka $(-81)^{\frac{1}{2}}$ tidak memiliki arti. Hal ini dikarenakan tidak ada bilangan x sehingga $\left((-81)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (x)^2 = -81$. Dapat disimpulkan bahwa x^2 harus merupakan bilangan positif. Artinya, apabila $(-81)^{\frac{1}{2}}$ dikuadratkan tidak pernah sama dengan –81.

Pangkat pecahan sering ditulis dalam bentuk radikal, yaitu untuk bilangan asli n.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

yaitu bilangan yang dipangkatkan n kembali menjadi a, atau

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Bentuk $\sqrt[n]{a}$ dinamakan akar pangkat n dari a. Khususnya, apabila n = 2, cukup ditulis $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ dan dibaca akar kuadrat dari a atau akar dari a.

Pangkat Pecahan Lainnya

Apabila m dan n bilangan asli, maka:

$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ atau $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$

Pangkat negatif dari pecahan diartikan sama dengan sebelumnya, yaitu jika m dan n bilangan asli, maka

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Contoh Soal

Tentukan nilai dari $100^{\frac{3}{2}}$.

Pembahasan:

$100^{\frac{3}{2}} = (10^2)^{\frac{3}{2}} = ((10^2)^3)^{\frac{1}{2}} = (10^6)^{\frac{1}{2}} = 10^3$

atau

$100^{\frac{3}{2}} = (10^2)^{\frac{3}{2}} = \left((10^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 10^3$

4. Operasi Aljabar Bilangan Berpangkat Pecahan

Sifat yang berlaku pada bilangan berpangkat bulat juga berlaku pada bilangan berpangkat pecahan. Untuk bilangan pecahan p, q, dan sembarang bilangan a, b (sehingga perpangkatan mempunyai arti), berlaku:

1) Bentuk $a^p \times a^q = a^{p+q}$, yaitu perkalian bilangan berpangkat sama dengan bilangan (basis) dengan pangkat dijumlahkan.
2) Bentuk $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$,dengan $a \neq 0$, yaitu pembagian bilangan berpangkat sama dengan bilangan (basis) dengan pangkat dikurangkan.
3) Bentuk $(ab)^p = a^p b^p$, yaitu pangkat dari perkalian sama dengan perkalian masing-masing bilangan berpangkat.
4) Bentuk $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, dengan $b \neq 0$, yaitu pangkat dari pembagian sama dengan pembagian dari masing-masing bilangan berpangkat.
5) Bentuk $(a^p)^q = a^{pq}$, yaitu pangkat bilangan berpangkat sama dengan bilangan bilangan (basis) dengan pangkat dikalikan.

Perkalian dua akar dengan pangkat sama, basisnya dapat dilakukan, atau $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Bentuk $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ tidak dapat disederhanakan lagi.

Menghitung Akar dengan Kalkulator – Freepik

Contoh Soal

Tuliskan sebagai satu bilangan berpangkat.

1. $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{5}{2}}$
2. $\sqrt{5} \times \sqrt[4]{5}$
3. $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{7}}$

Pembahasan:

1. $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}}$
   $= 3^{\frac{2+15}{6}}$
   $= 3^{\frac{17}{6}}$
2. $\sqrt{5} \times \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4}}$
   $= 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$
   $= 5^{\frac{2+1}{4}}$
   $= 5^{\frac{3}{4}}$
3. $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2-1}{6}} = 7^{\frac{1}{6}}$

Pojok Matematika

Akar Kuadrat dalam Seni: Parthenon

- Parthenon di Athena, Yunani, menjadi salah satu contoh terkenal penggunaan rasio emas dalam arsitektur klasik. Bangunan ini dirancang dengan proporsi yang mendekati rasio emas, yaitu sekitar 1,618, untuk menciptakan harmoni visual dan kesan estetis yang seimbang. Nilai rasio emas ini secara matematis dapat ditulis sebagai $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sehingga keterkaitan antara rasio emas dengan akar kuadrat muncul dalam proses perhitungan proporsi bangunan, terutama saat menentukan perbandingan tinggi kolom dengan jarak antar kolom maupun dengan keseluruhan bangunan.
- Dalam proses perancangannya, para arsitek menggunakan prinsip segitiga emas, di mana perbandingan sisi-sisinya mengikuti rasio emas untuk menciptakan bentuk fasad dan pilar yang proporsional. Penggunaan perhitungan akar kuadrat pada $\sqrt{5}$ membantu menentukan ukuran ideal bagian depan Parthenon agar tampak simetris saat dilihat dari kejauhan. Prinsip ini juga diterapkan dalam pemilihan ukuran tinggi pilar, lebar lantai, dan kemiringan atap, sehingga keseluruhan struktur memberikan kesan harmonis antara elemen horizontal dan vertikal bangunan.
- Pemanfaatan akar kuadrat dalam perhitungan rasio emas pada Parthenon menunjukkan bahwa konsep matematika tidak hanya berperan dalam penyelesaian soal hitungan, tetapi juga memiliki fungsi nyata dalam menciptakan keindahan arsitektur. Proporsi rasio emas yang melibatkan akar kuadrat menjadi kunci dalam membangun struktur yang estetis sekaligus stabil, menjadikan Parthenon sebagai bukti nyata bagaimana ilmu matematika berperan dalam warisan budaya dan arsitektur dunia hingga kini.

5. Operasi Aljabar Bentuk Akar

Penggunaan Akar Menghitung Jarak – Freepik

8) Bentuk akar sejenis, a$\sqrt[n]{c}$ dan b$\sqrt[n]{c}$.

- ▷ Dua akar sejenis dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

$$a\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} \pm b\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} = (a \pm b)\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}$$

- ▷ Dua akar sejenis dapat dikalikan atau dibagi

$$a\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} \times b\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} = ab\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}\right)^{\mathbf{2}} = ab\sqrt[n]{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}$$

dan

$$\frac{\boldsymbol{a}\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b}\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

9) Bentuk akar yang tidak sejenis, $a\sqrt[n]{c}$ *dan* $b\sqrt[n]{d}$.

- ▷ Dua akar yang tidak sejenis tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

$$a\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} \pm b\sqrt[n]{\boldsymbol{d}}$$

Bentuk tersebut tidak dapat disederhanakan lebih lanjut.

- ▷ Dua akar yang tidak sejenis dapat dikalikan atau dibagi.

$$a\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} \times b\sqrt[n]{\boldsymbol{c}} = ab\sqrt[n]{\boldsymbol{cd}}$$

dan

$$\frac{\boldsymbol{a}\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b}\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}}$$

10) Dua akar dengan pangkat berbeda dapat dikalikan. Dengan mengubahnya ke dalam bentuk notasi pangkat pecahan, diperoleh:

$$\begin{aligned} m\sqrt[n]{c} \times m\sqrt[n]{c} &= c^{\frac{1}{m}}\, d^{\frac{1}{n}} \\ &= c^{\frac{n}{m \times n}}\, d^{\frac{m}{m \times n}} \\ &= (c^n d^m)^{\frac{1}{m \times n}} \\ &= \sqrt[m \times n]{c^n d^m} \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Sederhanakan bentuk $\sqrt{96} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$.
2. Tuliskan bentuk $(\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(\sqrt{5} + 5\sqrt{2})$ tanpa tanda kurung, kemudian sederhanakan.

Pembahasan:

1. Bentuk akar harus disederhanakan terlebih dahulu sehingga bilangan yang berada dalam akar adalah bilangan bulat sekecil mungkin.

$$\begin{aligned}\sqrt{96} + \sqrt{54} - \sqrt{24} &= \sqrt{16 \times 6} + \sqrt{9 \times 6} - \sqrt{4 \times 6} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{6} + \sqrt{9} \times \sqrt{6} - \sqrt{4} \times \sqrt{6} \\ &= 4\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} \\ &= 5\sqrt{6}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(\sqrt{5} + 5\sqrt{2}) &= (\sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \times 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \times \sqrt{5} - (5\sqrt{2})^2 \\ &= 5 + 5\sqrt{10} - 5\sqrt{10} - 50 \\ &= 5 - 50 = -45\end{aligned}$$

6. Permasalahan Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar

Peluruhan Zat Radioaktif Menggunakan Konsep Bilangan Berpangkat – Freepik

Dalam masalah kontekstual, bentuk perpangkatan sebaiknya disederhanakan agar perhitungan menjadi lebih mudah. Setiap bilangan positif selalu dapat dituliskan dalam bentuk $a \times 10^b$, dengan nilai a memenuhi $1 \leq a < 10$ dan b adalah bilangan bulat. Bilangan yang ditulis seperti itu dinamakan sebagai bilangan dalam bentuk penulisan ilmiah atau notasi ilmiah.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan bilangan berpangkat dan bentuk akar diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang bagaimana penyederhanaan, operasi aljabar, dan masalah kontekstual tentang bilangan berpangkat dan bentuk aljabar. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Apabila n bilangan asli, maka $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ *(sebanyak n faktor)*

2) Apabila n bilangan asli dan $a \neq 0$, berlaku: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

   Apabila $a \neq 0$ maka $a^0 = 1$.

3) Apabila n bilangan asli dan $a^{\frac{1}{n}} = b$, maka $b^n = a$. Dalam bentuk lain, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

   Apabila terdapat 2 atau lebih b yang memenuhi $b^n = a$, maka dipilih b yang bertanda positif.

   Secara khusus, apabila n bilangan genap, maka ada dua b yang memenuhi, dan perhatikan bahwa $a^{\frac{1}{n}}$ hanya mempunyai arti jika $a > 0$.

4) Apabila m bilangan bulat dan n bilangan asli, maka $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

   Berdasarkan hal ini, arti a^p telah didefinisikan jika p bilangan rasional atau pecahan.

5) Apabila a dan b sembarang bilangan serta p dan q bilangan rasional sehingga perpangkatan berikut memiliki arti, maka:

   ▷ Perkalian bilangan berpangkat: $a^p \times a^q = a^{p+q}$

   ▷ Pembagian bilangan berpangkat: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, $a \neq 0$

   ▷ Pemangkatan bilangan berpangkat: $(a^p)^q = a^{pq}$

Latihan Soal

1. Nilai dari 5^{-2} adalah ...

   a. 25
   b. −25
   c. −5
   d. $-\frac{1}{25}$
   e. $\frac{1}{25}$

2. Hasil dari $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ adalah ...

   a. 3
   b. 9
   c. $\frac{1}{3}$
   d. $\frac{1}{9}$
   e. $\frac{2}{3}$

3. Penyederhanaan dari bentuk $(2^3)^2 \times t^3 \times t^{-1}$ adalah ...

   a. 2^6t^4
   b. 2^5t^2
   c. 2^5t^4
   d. $2^6\,2t$
   e. $2^6\,t^2$

4. Hasil dari $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48}$ adalah ...

   a. $9\sqrt{3}$
   b. $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
   c. $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
   d. $5\sqrt{3}$
   e. $5\sqrt{3} - \sqrt{6}$

5. $3\sqrt{2}\ (8\sqrt{3} - 5\sqrt{6}) = ...$

   a. $24\sqrt{6} + 15\sqrt{3}$
   b. $12\sqrt{6} + 30\sqrt{3}$
   c. $24\sqrt{6} - 30\sqrt{3}$
   d. $16\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$
   e. $24\sqrt{6} + 30\sqrt{3}$

6. Bentuk sederhana dari $\frac{6}{2-\sqrt{3}}$ adalah ...

   a. $6(2 - \sqrt{3})$
   b. $2(6 - \sqrt{3})$
   c. $6(3 + \sqrt{2})$
   d. $6(2 + \sqrt{3})$
   e. $6(3 - \sqrt{2})$

7. Bentuk sederhana dan berpangkat positif dari $\frac{ab^{-4}}{a^2b}$ adalah ...

   a. $\frac{b^5}{a^2}$
   b. $\left(\frac{a}{b}\right)^3$
   c. $\left(\frac{b}{a}\right)^3$
   d. $\frac{b^2}{a^3}$
   e. $\frac{a^3}{b^5}$

8. Diketahui $4^{2x} = 8^4$, nilai x adalah ...

   a. 1
   b. 3
   c. 5
   d. −1
   e. 2

9. Hasil dari $3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} - \sqrt{32}$ adalah ....

   a. $7\sqrt{2}$
   b. $5\sqrt{2}$
   c. $6\sqrt{2}$
   d. $8\sqrt{2}$
   e. $9\sqrt{2}$

10. Hasil dari $(-8m^2n^3) \times (2k^3n^4)$ adalah ...

   a. $-16k^3m^2n^{12}$
   b. $-16k^3m^2n^7$
   c. $16k^3m^2n^{12}$
   d. $16k^3m^2n^7$
   e. $16k^6m^2n^7$

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 9 BAB 2

Referensi

Arief, B. A. & Rahman, D. F. 2020. Konsep Dasar Aljabar dan Aplikasinya. Bandung: Penerbit PT Remaja Rosdakarya.

Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Harris, L. M. & Jones, R. T. 2018. Mathematics in Art and Architecture: The Role of Square Roots in the Parthenon. Mathematical Studies, 34(2), 45-59.

Pratama, M. D. & Zulkarnain, N. 2021. Matematika untuk Pendidikan dan Ilmu Pengetahuan Alam. Bandung: Penerbit Alfabeta.

Rahayu, P. & Saputra, S. (2019). The Application of Exponents in Cartography: Using Powers for Map Scaling. Journal of Geography and Mathematics, 56(4), 150-162.

Siregar, R. 2019. Matematika Dasar: Teori dan Aplikasi. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Wiggle, A. & Ridenour, A. 2014. Fundamentals of Algebra and Geometry. New York: Springer.

Zhao, X. & Li, Y. (2020). Astronomical Calendars and the Role of Square Roots in Ancient Timekeeping Systems. Journal of Ancient Mathematics, 42(3), 102-115.

BAB 3
KESEBANGUNAN

Karakter Pelajar Pancasila

- ▷ **Bernalar Kritis**

  Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan bentuk bangun yang serupa.

Kata Kunci: Kesebangunan, Dua Segitiga Sebangun, Dua Segi Empat Sebangun, Luas Permukaan, Skala, Pembesaran, Pengecilan, Volume

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Benda-Benda yang Serupa atau Sebangun

1. **Memahami skala pada foto atau gambar.**
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep bilangan berpangkat.
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep notasi ilmiah dalam matematika.

2. **Menyelesaikan persoalan terkait unsur-unsur yang bersesuaian pada dua segitiga sebangun.**
   - ▷ Menggunakan operasi hitung untuk menyelesaikan berbagai kasus bilangan berpangkat.
   - ▷ Memahami perbedaan bilangan berpangkat bilangan bulat positif dan negatif.

3. **Mendefinisikan sifat-sifat kesebangunan pada bangun ruang.**
    - ▷ Mengidentifikasi berbagai bentuk akar dalam matematika.
    - ▷ Menerapkan operasi hitung bentuk akar.

4. **Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan.**
    - ▷ Mengembangkan model matematika untuk menyelesaikan masalah bilangan berpangkat dan notasi ilmiah dalam kehidupan sehari-hari.
    - ▷ Menerapkan teori matematika dalam berbagai permasalahan yang ditemui di kehidupan nyata.

F I T R I

1. Bangunan yang Serupa atau Sebangun

Pohon yang Terlihat Serupa – Freepik

Dalam geometri, konsep kesebangunan merupakan salah satu konsep dasar yang sangat penting. Kesebangunan terjadi ketika dua benda yang dapat diubah dengan menggunakan pembesaran/pengecilan yang terkadang disertai dengan pergeseran, pencerminan, atau perputaran, sehingga bentuknya sama, tetapi ukurannya berbeda. Bangun-bangun ini dapat berupa dua segitiga, dua persegi panjang, atau bahkan bangun-bangun yang lebih kompleks. Kesebangunan pada bangun tidak hanya berhubungan dengan bentuknya yang serupa, tetapi juga dengan perbandingan sisi-sisi dan sudut-sudutnya yang memiliki hubungan tertentu.

Penting untuk dicatat bahwa perbandingan sisi-sisi ini tidak hanya berlaku pada satu pasang sisi, tetapi untuk semua pasang sisi yang bersesuaian antara dua bangun tersebut. Oleh karena itu, jika dua bangun memiliki kesebangunan, maka perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian akan konsisten di seluruh bangun tersebut.

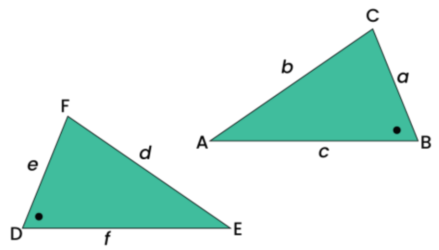
Sebagai contoh, gambar dua kursi di atas menjadi sebangun setelah salah satu diperbesar/diperkecil.

Pojok Matematika

Miniatur: Representasi Skala dan Kesebangunan

- Bangun ruang miniatur merupakan representasi tiga dimensi dari objek atau bangunan nyata yang direduksi dalam ukuran tertentu. Representasi ini digunakan dalam berbagai bidang, mulai dari arsitektur, perencanaan kota, hingga mainan edukatif seperti LEGO dan maket. Untuk menciptakan miniatur yang akurat dan fungsional, prinsip kesebangunan dan skala menjadi aspek utama yang harus diperhatikan.
- Dalam proses pembuatan miniatur, setiap elemen dari objek asli harus direduksi secara proporsional agar bentuk dan ukuran relatifnya tetap sesuai. Prinsip kesebangunan menjamin bahwa bentuk miniatur memiliki perbandingan sisi yang sama dengan objek aslinya, sehingga tidak terjadi distorsi pada tampilan akhir. Skala yang digunakan juga harus konsisten agar keseluruhan model terlihat realistis dan mampu merepresentasikan objek asli secara tepat.
- Penerapan konsep ini tidak hanya melatih pemahaman terhadap bentuk dan ukuran, tetapi juga meningkatkan kemampuan berpikir spasial dan matematis. Penggunaan miniatur sebagai media belajar membantu memahami hubungan antara panjang, luas, dan volume dalam bentuk nyata dan bentuk hasil reduksi. Dengan demikian, bangun ruang miniatur menjadi contoh nyata penerapan konsep matematika dalam kehidupan sehari-hari, khususnya dalam bidang desain dan pendidikan.

2. Segitiga dan Segi Empat Sebangun



Dua segitiga ABC dan DEF disebut sebangun apabila dapat mengaitkan tiga titik A, B, dan C dengan tiga titik D, E, dan F, sehingga sudut yang berkaitan sama besar serta sisi yang seletak sebanding dan ditulis:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

dengan A berkaitan dengan E, B berkaitan dengan D, dan C berkaitan dengan F.

Apabila kaitan antara 2 titik sesuai dengan definisi A ↔ E, B ↔ D. Dan C ↔ F, maka sudut yang seletak:

$\angle CAB = \angle DEF$

$\angle ABC = \angle FDE$

$\angle BCA = \angle EFD$

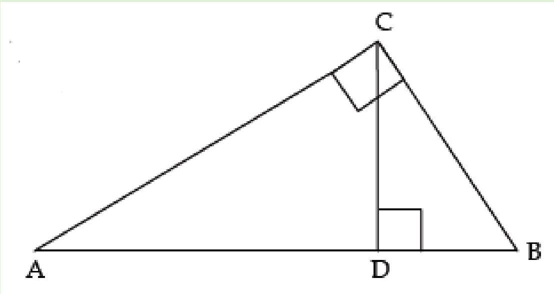
dan perbandingan sisinya:

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD} = \frac{CA}{EF} = k$

dengan k merupakan faktor kesebangunan atau faktor skala.

Contoh Soal

Diketahui panjang AB = 9 cm dan AD = 5 cm. Tentukan panjang BC.



Pembahasan:

Segitiga ABC dan segitiga BCD sebangun.

Diketahui: AB = 9 cm, AD = 5 cm.

Panjang DB = AB – AD = 9 – 5 = 4 cm

Untuk itu, berlaku

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB} \rightarrow \frac{9}{BC} = \frac{BC}{4}$

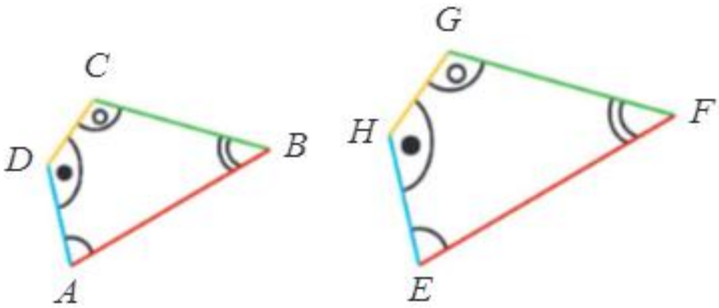
$BC^2 = 9 \times 4 = 36$

$BC = \sqrt{36} = 6$

Jadi, panjang BC adalah 6 cm.

Gedung-gedung Sebangun – Freepik

Dua segi empat disebut apabila dapat mengaitkan setiap titik sudut di masing-masing segi empat, sehingga panjang sisi yang seletak sebanding dan sudut yang berkaitan sama besar. Perhatikan gambar berikut.

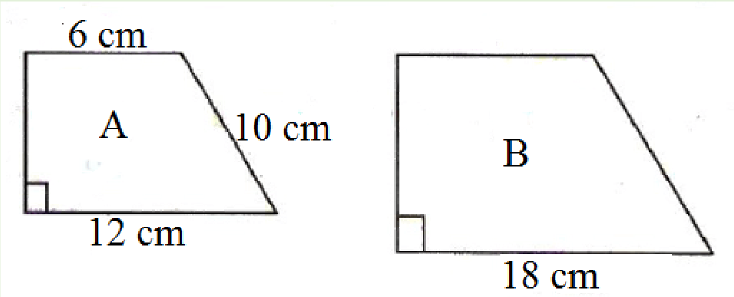


Pada gambar tersebut, jika A dikaitkan dengan E, B dengan F, C dengan G, dan D dengan H, maka:

$\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle G$, $\angle D = \angle H$, dan $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}$

Contoh Soal

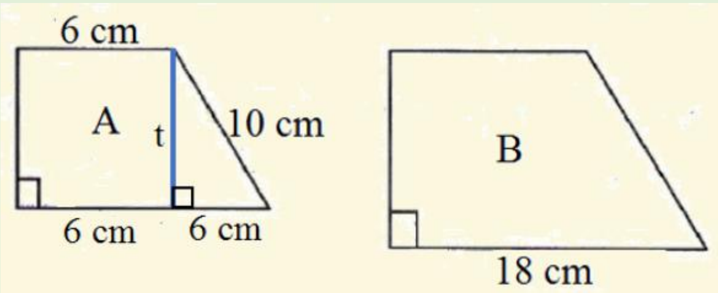
Gambar dua trapesium berikut adalah sebangun.



Tentukan luas trapesium B.

Pembahasan:

Perhatikan gambar.



Tinggi trapesium A dapat dihitung dengan menerapkan rumus Phytagoras, yaitu

$t_A = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

Pada trapesium B, sisi atas dapat ditentukan dengan perbandingan, yaitu

$\frac{12}{18} = \frac{6}{x} \leftrightarrow x = \frac{6 \times 18}{12} = 9$ cm

Tinggi trapesium B juga dapat ditentukan dengan perbandingan.

$\frac{12}{18} = \frac{8}{t_B} \leftrightarrow t_B = \frac{18 \times 8}{12} = 12$ cm

Dengan demikian, maka

$L_B = \frac{(18 + 9) \times 12}{2}$

$= 27 \times 6$

$= 162$

Jadi, luas trapesium B adalah 162 cm^2.

3. Segitiga yang Sebangun

Bentuk Segitiga pada Atap Rumah – Freepik

Terdapat dua hal yang harus diamati untuk dua bentuk sebangun, yaitu sudut yang bersesuaian harus sama besar dan sisi yang bersesuaian harus sebanding. Namun, khusus untuk segitiga, syarat ini dapat dipermudah. Hal ini disebut dengan teorema:

1) Apabila dua segitiga memiliki tiga pasang sudut yang sama besar, maka segitiga tersebut sebangun.
2) Apabila setiap sisi yang seletak pada dua segitiga sebanding, maka segitiga tersebut sebangun.

Berdasarkan kedua teorema tersebut, syarat kesebangunan untuk segitiga lebih mudah dibandingkan syarat kesebangunan segi banyak, yaitu cukup salah satu syarat dipenuhi. Secara lengkap, untuk menguji bahwa dua segitiga sebangun dapat digunakan salah satu dari sifat berikut.

a. Kedua segitiga mempunyai tiga pasang sisi yang sebanding. Syarat ini mudah diterima karena suatu segitiga ditentukan oleh ketiga sisinya.
b. Kedua segitiga memiliki dua sisi yang sebanding sudut yang diapit oleh kedua sisi sama besar. Hal ini dapat dibuktikan dengan cara yang serupa dengan sifat lainnya. Suatu segitiga dapat dibentuk jika diketahui dua sisi dan satu sudut yang diapit.
c. Kedua segitiga memiliki satu sisi dan dua sudut pada sisi tersebut yang sama besar. Dengan demikian, sudut ketiga dari dua segitiga sama besar. Suatu segitiga dapat dibentuk apabila diketahui satu sisi dan dua sudut pada sisi tersebut. Satu sisi itulah yang menentukan besarnya perbandingan.

Jika dua segitiga sebangun maka dua kesimpulan berikut tetap berlaku, yaitu:

a. Perbandingan sisi yang seletak dari kedua segitiga sama besar, dan
b. Sudut yang seletak dari kedua segitiga sama besar.

Untuk melihat sisi seletak, dapat menggunakan perbandingan berikut.

$$\frac{sisi\ terpanjang\ \Delta 1}{sisi\ terpanjang\ \Delta 2} = \frac{sisi\ terpendek\ \Delta 1}{sisi\ terpendek\ \Delta 2} = \frac{sisi\ ketiga\ \Delta 1}{sisi\ ketiga\ \Delta 2}$$

dan untuk sudut seletak, dapat menggunakan kaidah berikut.

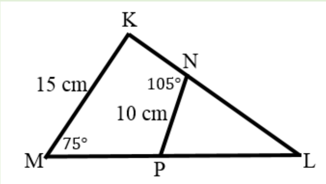
sudut pertama Δ1 = sudut Δ2 yang masing-masing berhadapan dengan sisi terpanjang

sudut kedua Δ1 = sudut Δ2 yang masing-masing berhadapan dengan sisi terpendek

sudut ketiga Δ1 = sudut ketiga Δ2

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



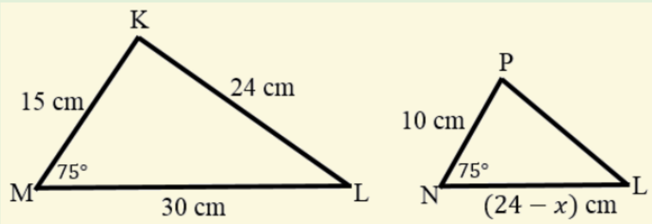
Diketahui panjang LM = 30 cm dan LK = 24 cm, maka panjang KN adalah ...

Pembahasan:

∠KNP dan ∠PNL berpelurus, maka

∠PNL = 180° – ∠KNP = 180° – 105° = 75°

Perhatikan gambar segitiga MLK dan PLN berikut.



Kedua segitiga tersebut saling sebangun dengan perbandingan sisi yang bersesuaian, yaitu MK ~ NP, ML ~ NL, dan KL ~ PL.

Misalkan panjang KN = x cm, maka NL = (24 − x) cm.

Dengan prinsip kesebangunan, diperoleh

$\frac{KM}{NP} = \frac{ML}{NL} \rightarrow \frac{15}{10} = \frac{30}{24 - x}$

24 – x = 20

x = 4

Jadi, panjang KN adalah 4 cm.

Pojok Matematika

Teknik Pengukuran Tinggi pada Zaman Kuno

- Piramida Mesir menjadi salah satu contoh peninggalan sejarah yang menunjukkan kecanggihan peradaban kuno dalam bidang arsitektur dan matematika. Salah satu metode yang digunakan oleh para arsitek Mesir kuno untuk memperkirakan tinggi piramida melibatkan konsep kesebangunan, khususnya dalam membandingkan panjang bayangan dengan tinggi benda. Teknik ini memungkinkan pengukuran dilakukan tanpa harus memanjat atau menyentuh struktur bangunan.
- Prinsip yang digunakan berlandaskan pada segitiga sebangun, yaitu dua segitiga yang memiliki sudut-sudut yang sama dan sisi-sisi yang bersesuaian dengan perbandingan yang tetap. Dengan memanfaatkan bayangan matahari, dibuat perbandingan antara tinggi sebuah tongkat dan panjang bayangannya, lalu dibandingkan dengan panjang bayangan piramida. Melalui perhitungan sederhana, tinggi piramida dapat ditentukan menggunakan rumus perbandingan sisi-sisi segitiga sebangun.
- Teknik ini mencerminkan pemahaman matematis yang tinggi dari masyarakat Mesir kuno, bahkan sebelum ditemukannya alat ukur modern. Penerapan konsep kesebangunan dalam kehidupan praktis tersebut membuktikan bahwa matematika telah lama menjadi alat bantu penting dalam menyelesaikan permasalahan teknis dan ilmiah, termasuk dalam proyek konstruksi besar seperti pembangunan piramida.

4. Sisi atau Sudut yang Tidak Diketahui

Pada pembahasan sebelumnya, telah dibuktikan bahwa jika dua segitiga sebangun, maka

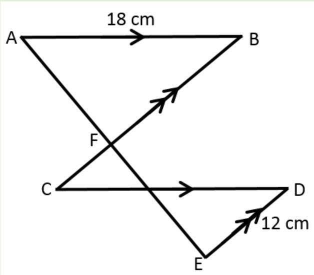
1) perbandingan sisi yang seletak memiliki nilai yang sama, dan
2) sudut yang seletak sama besar.

Berdasarkan dua informasi tersebut, maka dapat dihitung sisi atau sudut yang belum diketahui pada dua segitiga sebangun.

Ilustrasi Segitiga – Freepik

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.

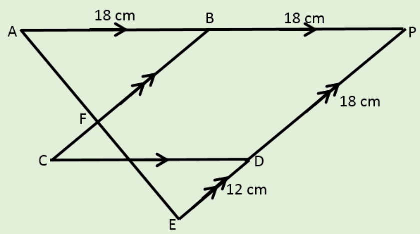


Diketahui AB = BC = CD. Tentukan panjang BF

Pembahasan:

∠KNP dan ∠PNL berpelurus, maka

Buat titik P seperti pada gambar di mana BP = CD = 18 cm dan BC = PD = 18 cm



Segitiga APE dan segitiga ABF merupakan segitiga sebangun, sehingga berlaku

$\frac{AB}{AP} = \frac{BF}{PE}$

$\frac{18}{18 + 18} = \frac{BF}{18 + 12}$

$\frac{1}{2} = \frac{BF}{30}$

BF = 15

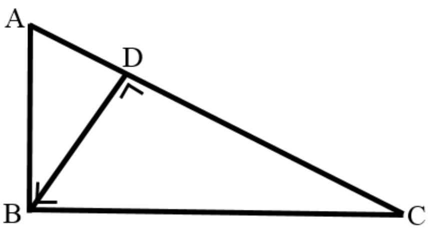
Jadi, panjang BF adalah 15 cm.

5. Segitiga Sebangun

Penerapan Konsep Kesebangunan pada Miniatur – Freepik

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai satu segitiga yang di dalamnya terdapat dua segitiga atau lebih yang sebangun. Kemudian, panjang sisi segitiga tersebut akan dicari.

Bilangan Segitiga Siku-Siku dengan Garis Tinggi



Pada segitiga siku-siku ABC yang dilengkapi dengan garis tinggi BD, terlihat bahwa:

ΔABC sebangun dengan ΔABD

Mudah dibuktikan bahwa ΔABC juga sebangun dengan ΔACD. Akibatnya, ΔABD juga sebangun dengan ΔACD. Hal ini diperoleh dengan menggunakan informasi bahwa

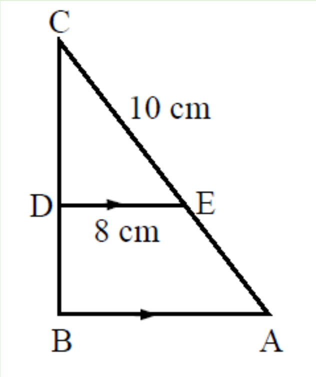
∠ABD = ∠DAC

Jadi, pada segitiga siku-siku ABC terdapat 3 segitiga yaitu ΔABC, ΔABD, dan ΔACD yang saling sebangun.

Garis Sejajar dalam Segitiga

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Apabila diketahui DE : AB = 2 : 3. Hitunglah panjang BD.

Pembahasan:

Diketahui: DE = 8 cm; CE = 10 cm.

Karena DE : AB = 2 : 3, maka

AB = $\frac{3}{2} \times 8$ = 12 cm.

Pada segitiga siku-siku CDE, berlaku teorema Phytagoras.

CD = $\sqrt{CE^2 - DE^2}$

= $\sqrt{10^2 - 8^2}$

= $\sqrt{36}$ = 6 cm

CDE dan ABC sebangun dengan CD ~ CB dan DE ~ BA, sehingga

$\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{BA}$

$\frac{6}{6 + BD} = \frac{8}{12}$

6 + BD = $\frac{6 \times 12}{8}$ = 9

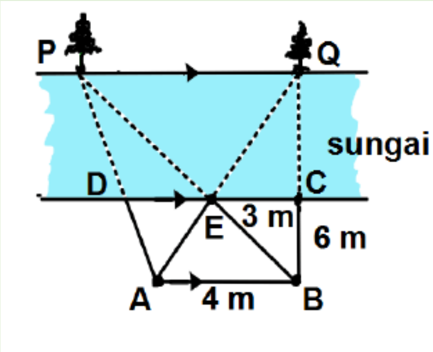
BD = 9 – 6 = 3 cm

Jadi, panjang BD adalah 3 cm.

Kesebangunan Lainnya

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Dua orang bernama A dan B akan mengukur jarak pohon P dan Q di seberang sungai. Mereka membuat patok pada titik C, D, dan E seperti gambar. Tentukan jarak pohon P dan Q.

Pembahasan:

Misalkan lebar sungai = CQ = x.

Perhatikan bahwa segitiga ABQ sebangun dengan segitiga ECQ sehingga berlaku

$\frac{AB}{EC} = \frac{BQ}{CQ} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{6+3}{x}$

4x = 3(6 + x)

4x = 18 + 3x

x = 18

Sekarang, perhatikan bahwa segitiga ECB sebangun dengan segitiga PQB sehingga berlaku

$\frac{PQ}{EC} = \frac{QB}{CB} \rightarrow \frac{PQ}{3} = \frac{18+6}{6}$

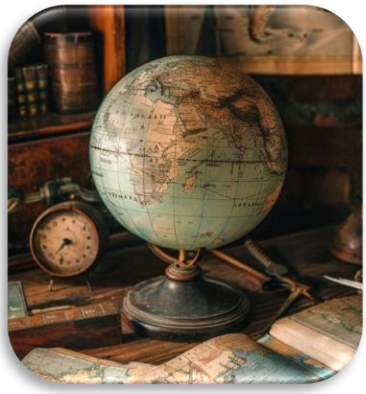
$\frac{PQ}{3} = 4$

PQ = 12

Jadi, jarak kedua pohon tersebut adalah 12 m.

Pojok Matematika

Menghitung Keliling Bumi dengan Kesebangunan



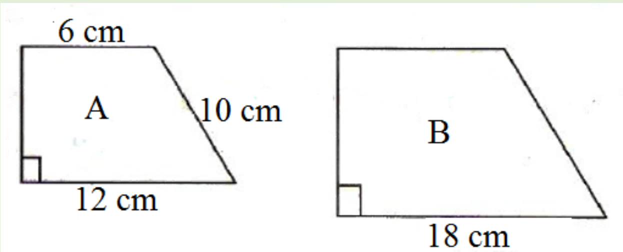
- Pada masa Yunani kuno, prinsip kesebangunan telah digunakan untuk menjawab pertanyaan besar tentang bentuk dan ukuran Bumi. Salah satu tokoh yang terkenal dengan pencapaian ini adalah Eratosthenes, seorang ilmuwan dan pustakawan dari Aleksandria. Dengan memanfaatkan bayangan matahari dan menerapkan konsep segitiga sebangun, dilakukan pengukuran keliling Bumi yang hasilnya sangat mendekati nilai sebenarnya, bahkan tanpa bantuan teknologi modern.
- Metode yang digunakan melibatkan pengamatan bayangan matahari pada dua lokasi berbeda yang terletak pada garis bujur yang hampir sama. Di kota Syene (sekarang Aswan), matahari pada siang hari musim panas berada tepat di atas kepala, sehingga tidak menimbulkan bayangan. Sementara itu, di Aleksandria yang berada di utara Syene, pada waktu yang sama, bayangan tongkat dapat diamati. Dengan mengukur panjang bayangan dan tinggi tongkat, diperoleh sudut antara sinar matahari dan permukaan tanah. Sudut ini kemudian digunakan sebagai perbandingan untuk menghitung keliling Bumi, berdasarkan prinsip kesebangunan antara segitiga kecil di permukaan dan lingkaran besar Bumi.
- Pendekatan ilmiah ini menunjukkan bahwa kesebangunan bukan hanya konsep abstrak dalam matematika, melainkan alat praktis dalam pengamatan astronomi. Keberhasilan pengukuran ini menjadi bukti bahwa penguasaan konsep geometris dan pemikiran logis dapat menghasilkan pemahaman mendalam tentang dunia fisik. Selain itu, metode ini juga membuka jalan bagi perkembangan ilmu ukur, navigasi, dan geografi di masa-masa berikutnya.

6. Perbandingan Luas untuk Bangun yang Sebangun

Ilustrasi Bangun yang Sebangun – Freepik

Contoh Soal

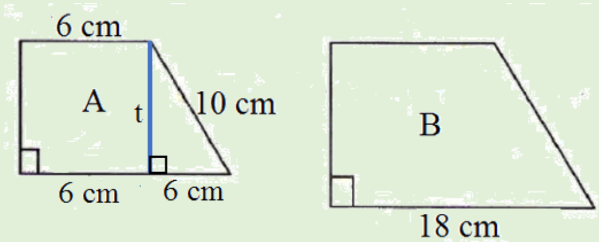
Perhatikan gambar berikut.



Dua trapesium di atas adalah sebangun. Hitunglah luas trapesium B.

Pembahasan:

Perhatikan gambar.



Tinggi trapesium A dapat dihitung dengan menerapkan rumus Pythagoras, yaitu

$t_A = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

Pada trapesium B, sisi atas dapat ditentukan dengan perbandingan, yaitu

$\frac{12}{18} = \frac{6}{x} \leftrightarrow x = \frac{6 \times 18}{12} = 9$ cm

Tinggi trapesium B juga dapat ditentukan dengan perbandingan.

$\frac{12}{18} = \frac{8}{t_B} \leftrightarrow t_B = \frac{18 \times 8}{12} = 12$ cm

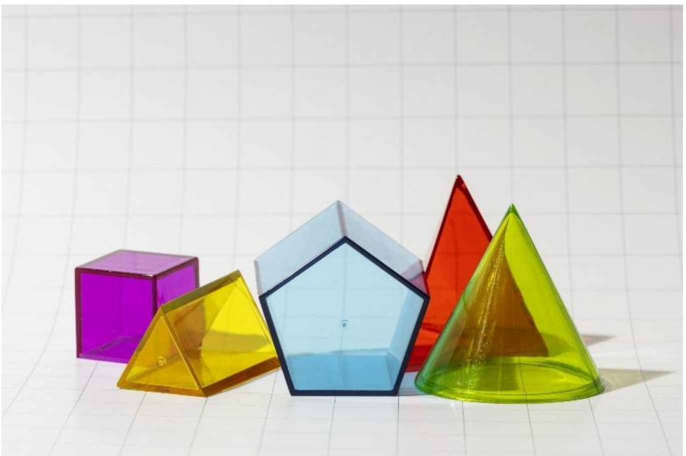
Dengan demikian, luas trapesium B adalah

$L_B = \frac{(18 + 9) \times 12}{2}$

$= 27 \times 6 = 162$

Jadi, luas trapesium B adalah 162 cm^2.

7. Kesebangunan pada Bangun Ruang



Berbagai Bangun Ruang – Freepik

Pada bangun datar, sifat kesebangunan berlaku seperti berikut. Misalkan dua persegi panjang sebangun dengan ukuran persegi panjang pertama $p_1 \times l_1$ ($p_1 > l_1$) dan ukuran persegi panjang kedua $p_2 \times l_2$ ($p_2 > l_1$). Kedua persegi panjang tersebut sebangun jika:

$$\frac{p_1}{p_2} = k, \text{ dan } \frac{l_1}{l_2} = k$$

dengan k disebut faktor skala tau faktor pembanding.

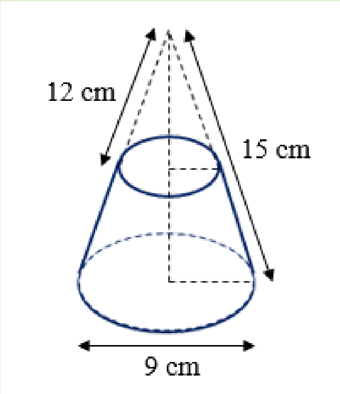
Pada bangun ruang, sifat kesebangunan berlaku seperti berikut. Misalkan dua balok sebangun dengan ukuran balok pertama $p_1 \times l_1 \times t_1$ ($p_1 > l_1 > t_1$) dan ukuran balok kedua $p_2 \times l_2 \times t_2$ ($p_2 > l_2 > t_2$). Kedua balok tersebut sebangun jika:

$$\frac{p_1}{p_2} = k, \frac{l_1}{l_2} = k, \text{ dan } \frac{t_1}{t_2} = k$$

dengan k disebut faktor skala atau faktor pembanding.

Contoh Soal

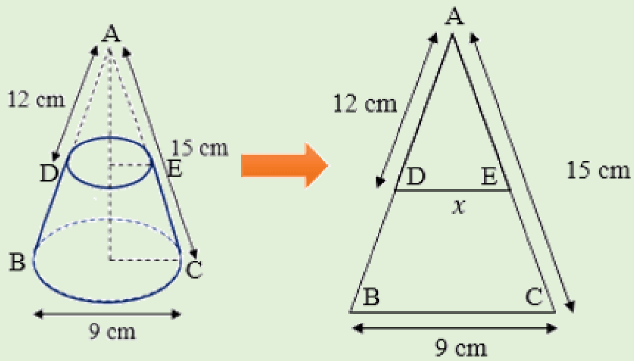
Perhatikan gambar berikut.



Hitunglah keliling alas kerucut yang kecil.

Pembahasan:

Perhatikan gambar.



Misalkan x merupakan panjang DE (diameter alas kerucut kecil).

Dengan menerapkan konsep kesebangunan segitiga, diperoleh

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{12}{15} = \frac{x}{9}$

$x = \frac{4 \times 9}{5} = \frac{36}{5}$

Menghitung keliling alas kerucut kecil

$k = \pi \times d$

$= \pi \times \frac{36}{5}$

$= \frac{36}{5}\pi$

Jadi, keliling kerucut kecil adalah $\frac{36}{5}\pi$ cm.

Pojok Matematika

Konsep Kesebangunan dalam Fotografi

- Fotografi memanfaatkan prinsip optik dan geometri untuk merekam citra dunia nyata ke dalam bentuk dua dimensi. Salah satu fenomena umum dalam fotografi adalah perubahan ukuran objek tergantung pada jarak terhadap kamera. Objek yang lebih jauh tampak lebih kecil, sedangkan objek yang lebih dekat tampak lebih besar. Meskipun demikian, bentuk objek tetap proporsional dan tidak berubah, karena konsep kesebangunan tetap berlaku dalam representasi visual ini.
- Fenomena ini terjadi karena sinar cahaya dari objek-objek yang berbeda jaraknya akan membentuk sudut pandang yang berbeda ketika mencapai lensa kamera. Lensa kemudian memproyeksikan objek-objek tersebut ke bidang gambar (sensor atau film) dalam bentuk bayangan yang tetap mempertahankan kesebangunan. Dengan demikian, meskipun ukuran tampak berubah, perbandingan sisi-sisi dan sudut-sudut antar bagian objek tetap konstan, menciptakan gambar yang realistis secara proporsional.
- Kesebangunan ini menjadi dasar penting dalam teknik fotografi perspektif, arsitektur visual, hingga sinematografi. Pemahaman terhadap prinsip ini memungkinkan fotografer untuk mengatur komposisi, menciptakan efek kedalaman, dan menjaga proporsi objek secara estetis. Selain itu, penerapan konsep matematika ini menunjukkan hubungan erat antara ilmu pengetahuan dan seni visual dalam menghasilkan citra yang akurat dan menarik.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan unsur-unsur bangun serupa atau sebangun diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang kesebangunan dan contohnya dalam bangun datar maupun bangun ruang. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Dua bangun disebut sebangun, jika suatu bentuk dapat diperoleh dari pergeseran, perputaran, atau pencerminan, dan terakhir dikuti oleh pembesaran/pengecilan dari bangun lain. Perhatikan bahwa pergeseran, perputaran, dan pencerminan tidak harus selalu ada. Khusus untuk sebangun, harus ada pembesaran pengecilan.

2) Khusus untuk segitiga, terdapat tiga cara untuk menguji apakah dua segitiga sebangun.

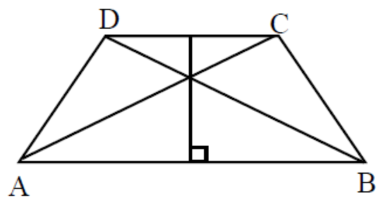
    ▷ Kedua segitiga mempunyai tiga pasang sisi yang sebanding. Syarat ini mudah diterima karena suatu segitiga ditentukan oleh ketiga sisinya.

    ▷ Kedua segitiga memiliki dua sisi yang sebanding sudut yang diapit oleh kedua sisi sama besar. Hal ini dapat dibuktikan dengan cara yang serupa dengan sifat lainnya. Suatu segitiga dapat dibentuk jika diketahui dua sisi dan satu sudut yang diapit.

    ▷ Kedua segitiga memiliki satu sisi dan dua sudut pada sisi tersebut yang sama besar. Dengan demikian, sudut ketiga dari dua segitiga sama besar. Suatu segitiga dapat dibentuk apabila diketahui satu sisi dan dua sudut pada sisi tersebut. Satu sisi itulah yang menentukan besarnya perbandingan.

Latihan Soal

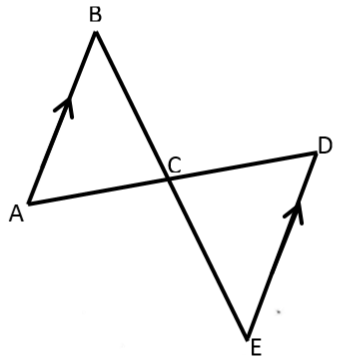
1. Perhatikan gambar berikut.



ABCD merupakan trapesium sama kaki. Banyak pasangan segitiga kongruen pada gambar tersebut adalah...

a. 4 pasang
b. 5 pasang
c. 6 pasang
d. 7 pasang
e. 8 pasang

2. Pasangan sisi yang sama panjang adalah ...

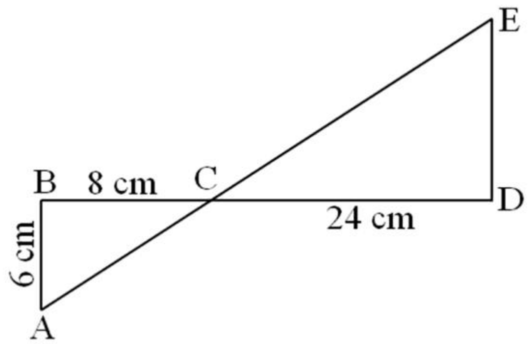


a. AB dan EC
b. AD dan BE
c. AC dan CD
d. BC dan CD
e. AB dan BC

3. Di antara segitiga di bawah ini, yang sebangun dengan segitiga dengan panjang sisi 9 cm, 12 cm, dan 18 cm adalah ...

a. 3 cm, 4 cm, dan 5 cm
b. 6 cm, 7 cm, dan 10 cm
c. 7 cm, 10 cm, dan 15 cm
d. 7 cm, 10 cm, dan 16 cm
e. 6 cm, 8 cm, dan 12 cm

4. Panjang DE pada gambar di bawah adalah ...



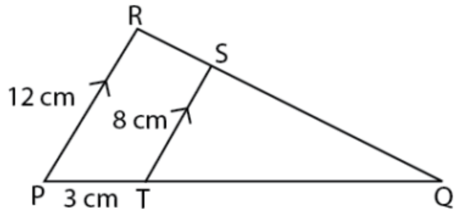
a. 12 cm

b. 14 cm

c. 16 cm

d. 18 cm

e. 20 cm

5. 

Panjang TQ adala

a. 6 cm

b. 5 cm

c. 4 cm

d. 7 cm

e. 8 cm

6. Sebuah foto berukuran tinggi 30 cm dan lebar 20 cm ditempel pada sebuah karton. Sisa karton di sebelah kiri, kanan, atas foto 2 cm. jika foto dan karton sebangun, sisa karton di bawah foto adalah...

a. 2 cm

b. 3 cm

c. 4 cm

d. 5 cm

e. 6 cm

7. Sebuah gedung mempunyai panjang bayangan 56 m di atas tanah mendatar. Pada saat yang sama, seorang siswa dengan tinggi 1,5 m mempunyai bayangan 3,5 m. Tinggi gedung sebenarnya adalah ...

a. 18 cm

b. 24 cm

c. 20 cm

d. 22 cm

e. 25 cm

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 9 BAB 3

Referensi

Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Dewiyani, K. S. S. 2023. Kesebangunan Dua Segitiga. Scribd.

Setianingrum, P. S., & Talan, B. Y. K. 2012. Penerapan Aspek Matematika Pada Bangunan Piramida Mesir Kuno. Universitas Kristen Satya Wacana.

Wahyudin, D. 2003. Geometri: Teori dan Aplikasi. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Woodethic. (2017). Cara Ilmuwan Yunani Menghitung Keliling dan Jari-Jari Bumi.

BAB 4

LINGKARAN

Karakter Pelajar Pancasila

- ▷ **Mandiri**

  Menyelesaikan permasalahan geometris yang berkaitan dengan lingkaran secara mandiri dengan menggunakan rumus yang tepat, seperti keliling, luas, panjang busur, dan luas juring, serta menerapkan konsep-konsep tersebut dalam situasi kehidupan nyata.

- ▷ **Bernalar Kritis**

  Mampu menganalisis dan mengidentifikasi hubungan antar unsur dalam lingkaran, baik dalam bentuk numerik maupun visual.

Kata Kunci: Lingkaran, Luas Juring, Panjang Busur.

Tujuan Pembelajaran: Menguak Rahasia Matematika dalam Bentuk Lingkaran

1. **Memahami unsur-unsur lingkaran.**
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep lingkaran.
   - ▷ Menjelaskan perbedaan dan fungsi setiap unsur lingkaran.

2. **Menyelesaikan persoalan terkait luas dan keliling lingkaran.**
   - ▷ Menggunakan rumus untuk menentukan luas dan keliling lingkaran.
   - ▷ Menjelaskan cara menentukan luas dan keliling lingkaran.

3. Menjelaskan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring lingkaran.

- ▷ Mengidentifikasi dan menghitung perbedaan sudut pusat, panjang busur, dan juring lingkaran.
- ▷ Memahami hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan juring lingkaran.

4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan lingkaran.

- ▷ Mengembangkan model matematika untuk menyelesaikan masalah lingkaran dalam kehidupan sehari-hari.
- ▷ Menerapkan teori matematika dalam berbagai permasalahan yang ditemui di kehidupan nyata.

1. Pengertian Lingkaran

Bianglala Berbentuk Lingkaran – Freepik

Lingkaran adalah salah satu bentuk bangun datar yang paling dikenal dan banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Secara matematis, lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang memiliki jarak yang sama terhadap titik tertentu.

Titik tertentu disebut sebagai pusat lingkaran. Jarak tetap dinamakan jari-jari lingkaran. Garis yang melalui lingkaran dinamakan garis tengah. Garis tengah memiliki panjang dua kali jari-jari, disebut sebagi diameter. Lingkaran tidak memiliki sudut maupun sisi lurus sebagaimana pada bangun datar seperti persegi atau segitiga. Panjang dari garis yang membentuk lingkaran dinamakan keliling lingkaran, sedangkan luas daerah di dalam lingkaran dinamakan luas lingkaran.

Pojok Matematika

Bagaimana Kompas Membuat Lingkaran Sempurna?

- Kompas merupakan alat ukur yang digunakan dalam bidang geometri untuk menggambar lingkaran atau busur dengan jari-jari tertentu. Alat ini terdiri atas dua kaki yang terhubung pada satu titik poros. Salah satu kaki memiliki ujung runcing untuk menancap pada kertas sebagai titik pusat, sedangkan kaki lainnya memegang pensil atau pena sebagai alat tulis. Ketika kompas diputar pada porosnya dengan jari-jari tetap, maka ujung pensil akan membentuk lintasan melingkar yang presisi dan konsisten, menghasilkan sebuah lingkaran sempurna.
- Fungsi utama kompas dalam geometri adalah membantu visualisasi konsep-konsep seperti pusat, jari-jari, diameter, dan busur. Selain itu, kompas sangat berguna dalam proses konstruksi geometris, seperti membagi sudut, menggandakan panjang, serta membuat segitiga dan segi banyak beraturan. Presisi dari alat ini memungkinkan para pelajar maupun profesional dalam bidang teknik dan arsitektur untuk menggambar bentuk geometris secara akurat, yang sangat penting dalam perencanaan desain dan struktur.
- Prinsip kerja kompas mencerminkan konsep matematis yang mendalam. Ketelitian perputaran kompas mengandalkan kestabilan titik pusat dan keseragaman panjang jari-jari selama proses menggambar. Dalam konteks pendidikan, penggunaan kompas memperkenalkan keterampilan dasar dalam konstruksi manual yang mendasari banyak metode analitis dan pemodelan dalam matematika lanjut. Keandalan dan kesederhanaannya menjadikan kompas sebagai salah satu alat pokok dalam studi geometri Euclides.

2. Keliling Lingkaran

Jam Dinding Lingkaran – Freepik

Keliling lingkaran dapat diketahuii dengan mengukur panjang dari seluruh sisi lengkung yang membentuk batas luar lingkaran. Dalam konsep geometri, keliling digunakan untuk menghitung jarak mengelilingi lingkaran sepenuhnya.

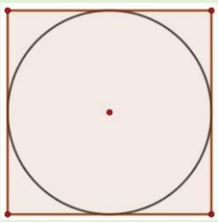
Dengan demikian,

$$\text{Keliling lingkaran} = 2\pi r = \pi d$$

Untuk perhitungan, nilai π yang digunakan adalah $\pi = 3{,}14$ atau $\frac{22}{7}$.

Contoh Soal

Keempat sisi persegi disinggung oleh sebuah lingkaran seperti pada gambar. Apabila keliling lingkaran 44 cm, maka panjang sisi persegi adalah ...



Pembahasan:

Rumus keliling lingkaran adalah $2\pi r$.

$K = 2\pi r$

$44 = 2 \times \frac{22}{7} r$

$44 = \frac{44}{7} r$

$1 = \frac{1}{7} r$

$r = 7$

Untuk $r = 7$ dan panjang sisi persegi adalah $2r = 14$.

Jadi, panjang sisi persegi adalah 14 cm.

3. Luas Lingkaran

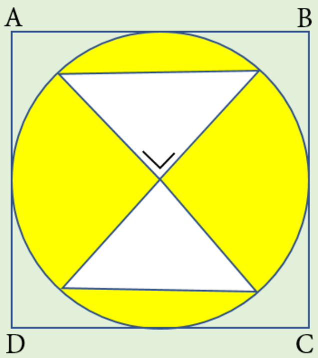
Luas digunakan untuk menyatakan seberapa banyak ruang yang tertutupi oleh suatu bentuk dua dimensi. Luas lingkaran merupakan ukuran besar daerah yang terdapat di dalam batas lingkaran. Sebagai bangun datar yang tidak memiliki sudut dan sisi lurus, lingkaran memiliki rumus tersendiri untuk menghitung luasnya, yang juga melibatkan konstanta π (pi).

Dengan demikian,

$$\text{Luas lingkaran} = \pi \times r = \pi r^2$$

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Diketahui ABCD merupakan persegi dengan panjang sisi 5 0cm. Di dalamnya terdapat sebuah lingkaran. Tentukan luas daerah yang diarsir warna kuning. (π = 3,14)

Pembahasan:

Luas lingkaran dinyatakan oleh

$L_{lingkaran} = \pi r^2$

$= 3{,}14 \times (25)^2$

$= 1.962{,}5 \text{ cm}^2$

Dua segitiga siku-siku di dalamnya kongruen (sama dan sebangun). Apabila digabungkan, akan membentuk sebuah persegi dengan panjang sisinya sama dengan panjang jari-jari, yaitu 25 cm. Sehingga luas persegi dinyatakan dengan

$L_{persegi} = 25^2 = 625 \text{ cm}^2$

Luas daerah yang diarsir warna kuning sama dengan luas lingkaran dikurangi dua kali luas segitiga, yaitu

L = 1.962,5 – 625 = 1337,5

Jadi, luas daerah yang diarsir berwarna kuning adalah 1337,5 cm^2.

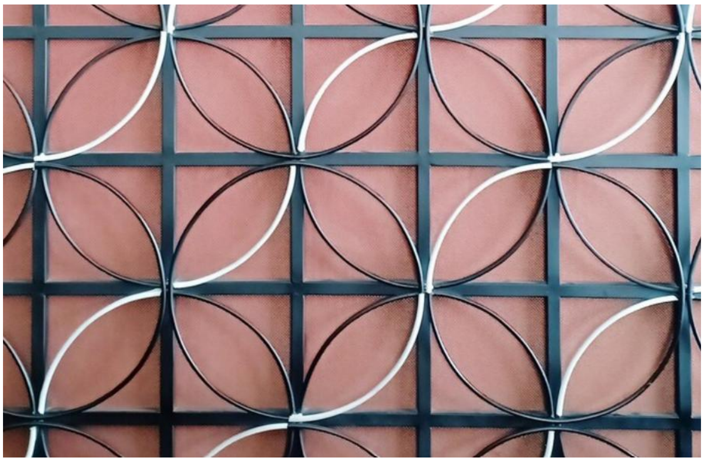
Roda Berbentuk Lingkaran – Freepik

Pojok Matematika

Teknik Diamater dan Kecepatan pada Ban Mobil

- Dalam dunia otomotif, ukuran diameter ban mobil memiliki peran penting terhadap performa kendaraan, terutama dalam hal jarak tempuh per satu kali putaran roda. Diameter ban menentukan keliling lingkaran roda, yang secara langsung berkaitan dengan jarak yang dilalui mobil setiap kali ban berputar penuh. Keliling lingkaran roda dihitung dengan rumus πd, di mana d adalah diameter ban dan π adalah konstanta pi. Semakin besar diameter ban, maka semakin besar pula kelilingnya, sehingga dalam satu putaran roda akan menempuh jarak yang lebih jauh.
- Pengaruh keliling ban tidak hanya terbatas pada jarak tempuh, tetapi juga berdampak pada kecepatan kendaraan. Pada kecepatan mesin yang konstan, ban dengan keliling lebih besar akan menghasilkan kecepatan kendaraan yang lebih tinggi karena menempuh jarak lebih jauh dalam jumlah putaran yang sama. Hal ini menjadi pertimbangan penting dalam modifikasi kendaraan atau penggantian ban, karena perubahan ukuran ban dapat memengaruhi pembacaan speedometer serta konsumsi bahan bakar.
- Namun, penggantian diameter ban tidak dapat dilakukan secara sembarangan. Ban yang terlalu besar dapat menyebabkan gangguan pada sistem suspensi, pengereman, hingga kestabilan kendaraan. Oleh karena itu, pemilihan ukuran ban harus memperhatikan keseimbangan antara efisiensi jarak tempuh, kenyamanan berkendara, serta keselamatan. Prinsip keliling lingkaran dalam matematika memberikan landasan teoritis yang kuat dalam memahami pengaruh diameter ban terhadap performa kendaraan secara keseluruhan.

4. Juring Lingkaran



Terali Beli Menyerupai Juring Lingkaran – Freepik

Apabila suatu lingkaran dipotong dua kali dan masing-masing melalui titik pusat lingkaran, maka lingkaran akan menjadi empat juring atau sektor.

Sektor atau juring merupakan bagian dari lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari dan garis lengkungnya.

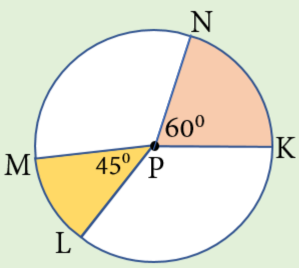
Ukuran suatu juring ditentukan berdasarkan sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari lingkaran dan dikenal sebagai sudut pusat. Dalam hal lingkaran penuh, besar sudut pusat adalah 360°. Besar sudut pusat ini menjadi dasar untuk menentukan panjang busur dan luas daerah juring yang bersangkutan.

$$\frac{panjang\ garis\ lengkung\ juring}{keliling\ lingkaran} = \frac{besar\ sudut\ pusat\ juring}{360°}$$

$$\frac{luas\ juring}{luas\ lingkaran} = \frac{besar\ sudut\ pusat\ juring}{360°}$$

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Diketahui luas juring KPN = 220 cm^2. Tentukan luas juring LPM.

Pembahasan:

$\frac{L_{KPN}}{L_{LPM}} = \frac{\angle KPN}{\angle LPM}$

$\frac{220}{L_{LPM}} = \frac{60°}{45°}$

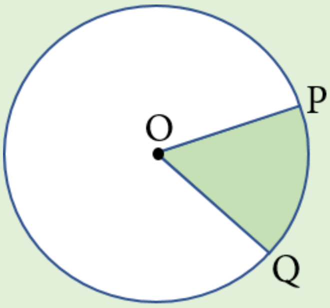
$\frac{220}{L_{LPM}} = \frac{4}{3}$

$L_{LPM} = \frac{220 \times 3}{4} = 165$

Jadi, luas juring LPM adalah 165 cm^2.

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Diketahui luas juring OPQ = 18,84 cm^2 dan besar ∠POQ = 60°. Tentukan panjang jari-jari OP. (π = 3,14)

Pembahasan:

Berdasarkan rumus luas juring, diperoleh

$L_{POQ} = \frac{60°}{45°} \times \pi r^2$

$18,84 = \frac{1}{6} \times 3,14 \times r^2$

$r^2 = \frac{18,84 \times 6}{3,14}$

r = 6

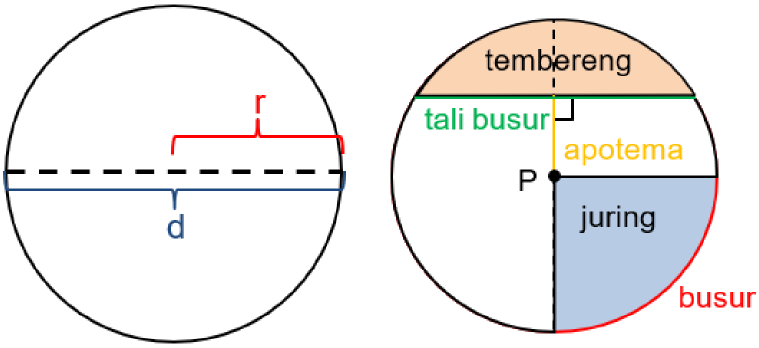
Jadi, panjang jari-jari lingkaran OP adalah 6 cm.

5. Tali Busur

Setir Mobil – Freepik

Garis di dalam lingkaran dengan kedua ujungnya terletak pada lingkaran dinamakan tali busur. Tali busur yang melalui titik pusat lingkaran dinamakan garis tengah atau diameter. Daerah yang dibatasi oleh tali busur lingkaran dinamakan tembereng.

Garis yang tegak lurus terhadap tali busur dari titik pusat lingkaran dinamakan apotema. Perhatikan gambar berikut.

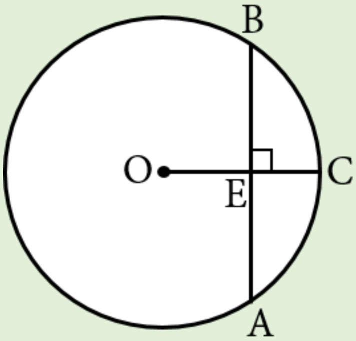


Untuk menghitung luas tembereng, dapat menggunakan rumus

Luas tembereng = Luas juring – luas segitiga

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Diketahui panjang OC = 20 cm dan CE = 8 cm. Hitunglah panjang tali busur AB.

Pembahasan:

Diketahui OC = 20 cm dan CE = 8 cm, artinya OE = 20 – 8 = 12 cm.

Panjang OB dan OA sama dengan panjang OC, yaitu 20 cm, karena merupakan jari-jari lingkaran.

Pada segitiga siku-siku OEB berlaku teorema Phytagoras.

BE = $\sqrt{OB^2 - OE^2}$

= $\sqrt{20^2 - 12^2}$

= $\sqrt{400 - 144}$

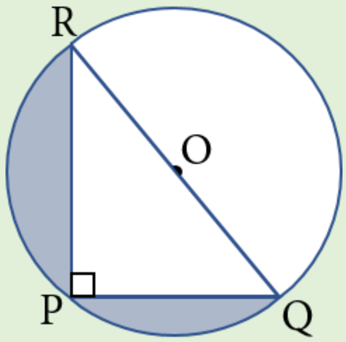
= $\sqrt{256}$ = 16 cm

BE = EA = 16 cm.

Dengan demikian, panjang tali busur AB adalah 16 + 16 = 32 cm.

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Berdasarkan lingkaran di atas, QR merupakan diameter, panjang PQ = 9 cm, dan PR = 12 cm. Tentukan luas daerah yang diarsir. (π = 3,14)

Pembahasan:

Segitiga RPQ merupakan segitiga siku-siku, maka berlaku terema Phytagoras

RQ = $\sqrt{PR^2 + PQ^2}$

= $\sqrt{12^2 + 9^2}$

= $\sqrt{144 + 81}$

= $\sqrt{225}$ = 15 cm

RQ merupakan diameter lingkaran sehingga panjang jari-jari lingkaran adalah r = $\frac{1}{2}$RQ = $\frac{15}{2}$ = 7,5.

Untuk mencari luas daerah yang diarsir, kurangi luas setengah lingkaran dengan luas segitiga RPQ. Sehingga luas lingkaran diperoleh

$L_{lingkaran} = \frac{1}{2} \times \pi \times r^2$

$= \frac{1}{2} \times 3{,}14 \times (7{,}5)^2$

= 88,3125 cm^2

Luas ΔRPQ sama dengan

$L_{RPQ} = \frac{RP \times PQ}{2}$

$= \frac{12 \times 9}{2}$

= 54 cm^2

Dengan demikian, luas arsiran adalah L = 88,3125 – 54 = 34,3125 cm^2.

Pojok Matematika

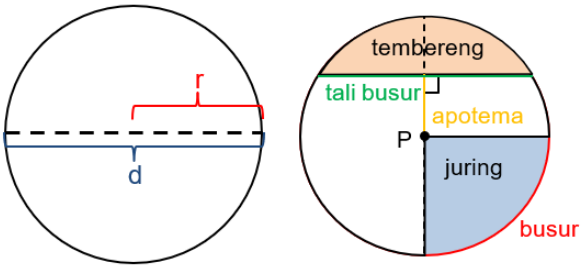
Logo Aplikasi Bulat

- Bentuk lingkaran banyak digunakan dalam desain ikon aplikasi modern, khususnya pada perangkat telepon pintar. Pemilihan bentuk ini bukan semata-mata keputusan estetika, melainkan didasarkan pada pertimbangan psikologis dan visual. Dalam psikologi desain, bentuk lingkaran memberikan kesan ramah, bersahabat, dan tidak mengancam. Dibandingkan dengan bentuk bersudut tajam yang sering diasosiasikan dengan kekakuan atau ketegasan, lingkaran menampilkan nuansa yang lebih lembut dan seimbang.
- Dari sudut pandang desain grafis, bentuk lingkaran bersifat simetris dan netral, sehingga mampu mengakomodasi berbagai elemen visual dalam ruang yang terbatas. Ikon aplikasi yang berbentuk bundar juga cenderung tampak rapi dan seragam ketika disusun pada antarmuka layar. Beberapa sistem operasi digital bahkan menetapkan standar ikon berbentuk lingkaran guna menjaga konsistensi tampilan dan memudahkan identifikasi visual oleh pengguna.
- Dalam konteks branding digital, bentuk lingkaran mencerminkan fleksibilitas, kontinuitas, serta keterbukaan. Aplikasi-aplikasi populer seperti Instagram, Spotify, dan WhatsApp menggunakan logo dengan desain melingkar untuk memperkuat citra modern dan inklusif. Fenomena ini menunjukkan bahwa konsep dasar lingkaran dalam geometri turut berperan dalam membentuk persepsi visual dalam kehidupan digital sehari-hari.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan unsur-unsur lingkaran diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang luas lingkaran, sudut pusat, panjang busur, dan juring lingkaran. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang memiliki jarak yang sama r terhadap titik tertentu (O). Ttitik O disebut pusat lingkaran dan jarak tetap r disebut jari-jari lingkaran.



2) Garis lurus dalam lingkaran dinamakan tali busur dan apabila melalui titik pusat dinamakan garis tengah. Panjang garis tengah adalah 2r. Garis tegak lurus terhadap tali busur dinamakan apotema.

3) Juring merupakan bagian dari lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari dan garis lengkung. Tembereng merupakan daerah yang dibatasi oleh tali busur dan garis lengkung.

4) Keliling lingkaran berjari-jari r adalah $2\pi r$.

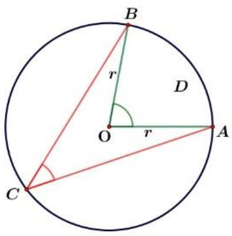
5) Luas lingkaran berjar-jari r adalah πr^2.

6) Keliling dan luas juring dapat dihitung sebagai bagian dari lingkaran melalui perbandingan besar sudut pusatmya.

$$\frac{panjang\ garis\ lengkung\ juring}{keliling\ lingkaran} = \frac{besar\ sudut\ pusat\ juring}{360^\circ}$$

$$\frac{luas\ juring}{luas\ lingkaran} = \frac{besar\ sudut\ pusat\ juring}{360^\circ}$$

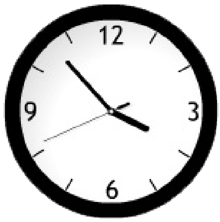
7) Sudut keliling adalah sudut yang dibatasi oleh tali busur dan titik sudut berada di lingkaran. Sudut pusat merupakan sudut yang dibatasi oleh jari-jari dan titik sudut berada di pusat. $\angle C$ merupakan sudut keliling dan $\angle AOB$ sudut pusat.



Besar sudut keliling adalah $\frac{1}{2}$ dari sudut pusat yang berhadapan dengan busur yang sama. Dalam hal ini $\angle C = \frac{1}{2}\angle AOB$.

Latihan Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



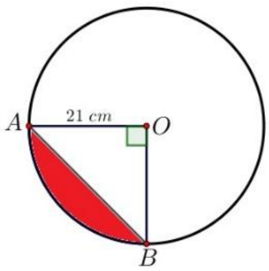
Panjang jarum menitan sebuah jam adalah 20 cm. Jarum itu bergerak selama 25 menit. Panjang lintasan yang dilalui ujung jarum itu dengan π = 3,14 adalah ...

a. 26,17 cm
b. 52,3 cm
c. 16,28 cm
d. 53,2 cm
e. 21,67 cm

2. Pak Anton membuat taman berbentuk persegi panjang berukuran 6 m × 5 m. Di tengah taman dibuat kolam berbentuk lingkaran berdiameter 2,8 m. Taman di luar kolam tersebut ditanami rumput. Luas taman yang ditanami rumput adalah ...

a. 25,60 m^2
b. 26,50 m^2
c. 30,88 m^2
d. 36,16 m^2
e. 23,84 m^2

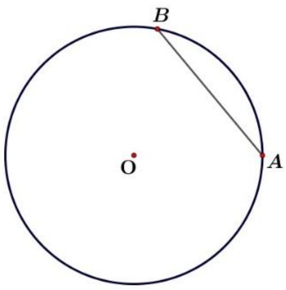
3. Perhatikan gambar berikut.



Luas tembereng yang diarsir pada gambar berikut adalah ...

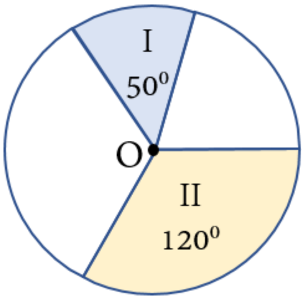
a. 154 cm^2
b. 144 cm^2
c. 128 cm^2
d. 126 cm^2
e. 132 cm^2

4. Garis AB disebut ...



a. Busur
b. Juring
c. Apotema
d. Tali busur
e. Diameter

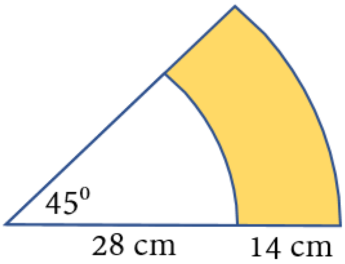
5.



Daerah I adalah juring lingkaran dengan sudut pusat 50°, sedangkan daerah II adalah juring lingkaran dengan sudut pusat 120°. Perbandingan luas daerah I dan II adalah ...

a. 5 : 12
b. 12 : 5
c. 5 : 17
d. 17 : 36
e. 5 : 36

6. Perhatikan gamba berikut.



Pada gambar di bawah, luas daerah yang diarsir adalah ... ($\pi = \frac{22}{7}$)

a. 231 cm²
b. 258 cm²
c. 385 cm²
d. 616 cm²
e. 770 cm²

7. Keliling sebuah lingkaran adalah 440 cm. Pernyataan berikut yang benar adalah ...

a. Jari-jari lingkaran adalah 140 cm
b. Diamater lingkaran adalah 70 cm
c. Luas lingkaran adalah 7.700 cm²
d. Luas lingkaran adalah 15.400 cm²
e. Jari-jari lingkaran adalah 280 cm

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 9 BAB 4

Referensi

Bryant, J. & Sangwin, C. 2008. How Round Is Your Circle? Where Engineering and Mathematics Meet. Princeton University Press.

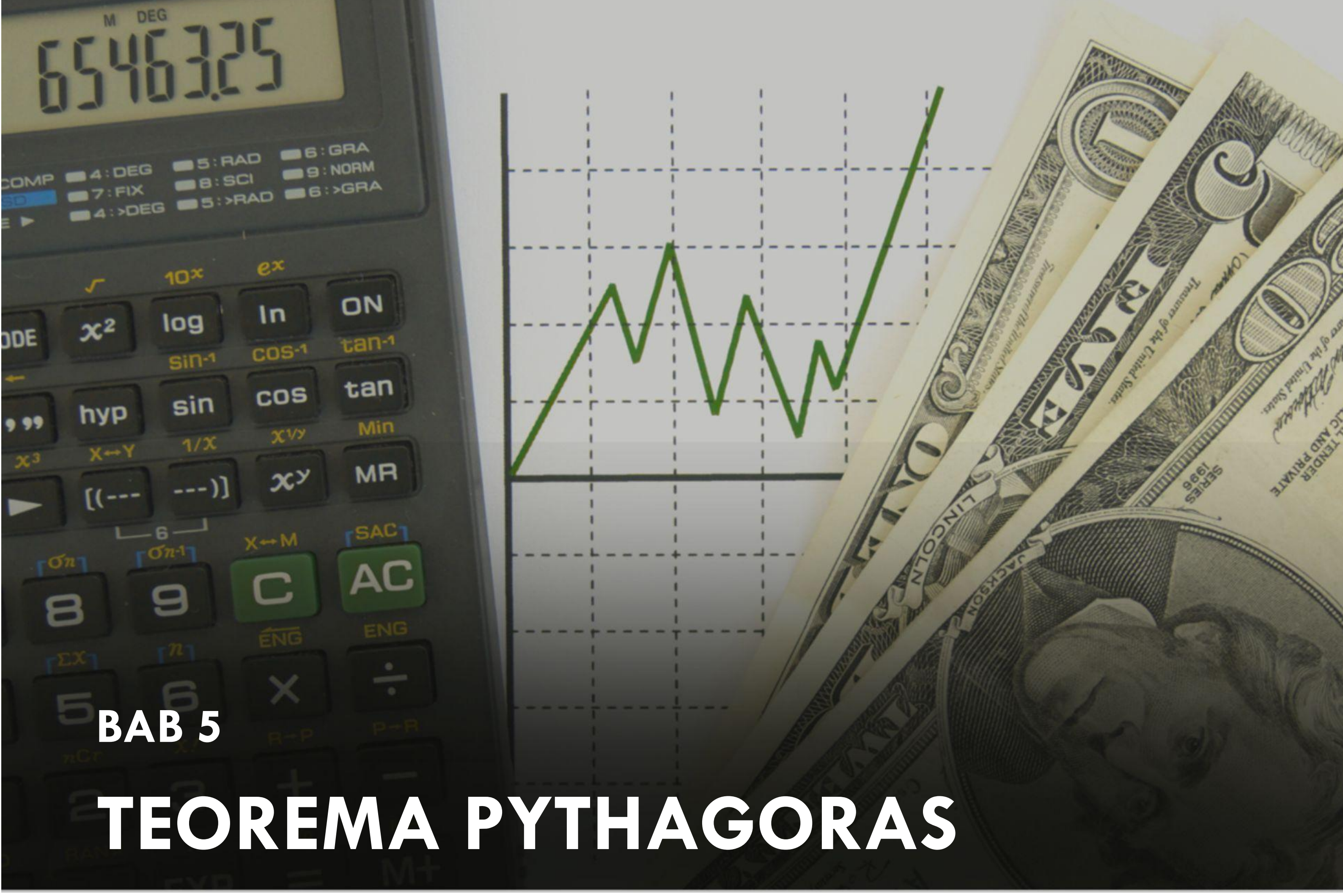
Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Many, Janet T. 2018. Pengembangan Model Pembelajaran Geometri Datar Berbasis Problem Solving. Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati Bandung.

Mashadi, M. 2018. Buku Geometri Bidang (Edisi 2). Universitas Riau.

Smith, M., & Barrett, J. 2017. Measurement and Decomposition: Making Sense of the Area of a Circle. ERIC edTPA Research Review.

Tisdell, C. C. & Olmedo, D. B. 2022. Beyond the compass: Exploring geometric constructions via a circle arc template and a straightedge. STEM Education, 2(1), 1–36.



BAB 5

TEOREMA PYTHAGORAS

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Bernalar Kritis**

Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika yang melibatkan segitiga siku-siku dan teorema Pythagoras.

Kata Kunci: Bidang Cartesius, Hipotenusa, Jarak, Segitiga Lancip, Segitiga Siku-Siku, Tumpul, Sudut, Teorema Pythagoras.

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Segitiga dengan Teorema Pythagoras

1. **Memahami pengertian segitiga siku-siku.**
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep segitiga siku-siku.
   - ▷ Menjelaskan penerapan teorema Pythagoras dalam segitiga siku-siku.

2. **Menentukan panjang segitiga dengan teorema Pythagoras.**
   - ▷ Menggunakan rumus Pythagoras untuk mengetahui panjang salah satu sisi segitiga siku-siku jika diketahui panjang dua sisi lainnya.
   - ▷ Memahami penerapan teorema Pythagoras pada berbagai masalah yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari.

3. Menyelesaikan masalah menggunakan teorema Pythagoras.

- ▷ Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bangun datar menggunakan teorema Pythagoras.
- ▷ Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bangun ruang menggunakan teorema Pythagoras.

4. Menentukan jenis segitiga dan titik pada Bidang Cartesius.

- ▷ Menentukan jenis segitiga (siku-siku, lancip, atau tumpul) apabila diketahui panjang ketiga sisinya.
- ▷ Menghitung jarak dua titik pada bidang Cartesius.

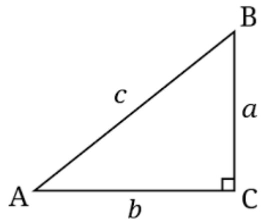
F I T R I

1. Teorema Pythagoras

Seseorang Memegang Segitiga Siku-siku – Freepik

Dalam segitiga siku-siku, jumlah kuadrat sisi-sisi tegak sama dengan kuadrat sisi miring. Sisi miring dalam segitiga siku-siku dinamakan hipotenusa. Sedangkan sisi tegak dinamakan sisi siku-siku. Dalam notasi matematika, teorema ini dituliskan sebagai:

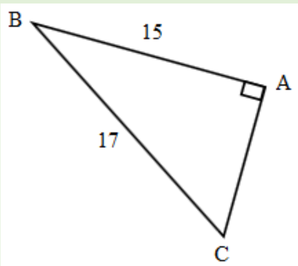
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Teorema Pythagoras hanya berlaku pada segitiga siku-siku, yaitu segitiga yang memiliki satu sudut tepat 90° . Apabila digunakan pada segitiga selain segitiga siku-siku, hasilnya tidak akan konsisten dan dapat menyebabkan kesalahan perhitungan.

Contoh Soal

Diketahui segitiga siku-siku dengan panjang dua sisinya seperti pada gambar berikut. Tentukan panjang sisi yang belum diketahui.



Pembahasan:

Dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$b^2 = c^2 – a^2$

$= 17^2 – 15^2$

$= 289 - 225$

$= 64$

$b = \sqrt{64} = 8$

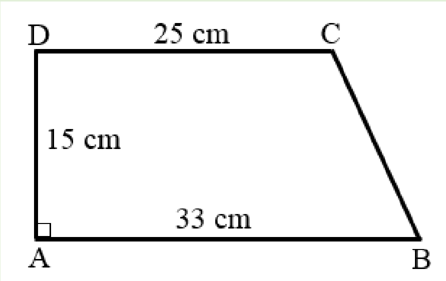
Jadi, b = 8 cm.

2. Penerapan Teorema Pythagoras pada Bangun Datar

Pada subbab ini akan dibahas contoh penggunaan teorema Pythagoras pada bangun datar.

Contoh Soal

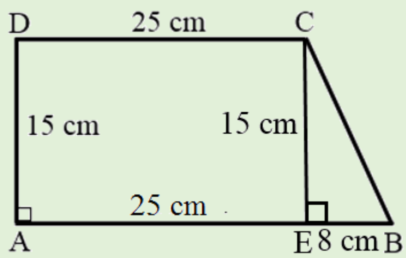
Perhatikan gambar trapesium berikut.



Tentukan panjang BC.

Pembahasan:

Tarik garis CE seperti gamabr berikut.



Diketahui panjang CE = AD = 15 cm dan panjang EB = AB – EA = 33 – 25 = 8 cm.

Segitiga CEB merupakan segitiga siku-siku.

Dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh

BC = $\sqrt{EB^2 + CE^2}$

= $\sqrt{8^2 + 15^2}$

= $\sqrt{64 + 225}$

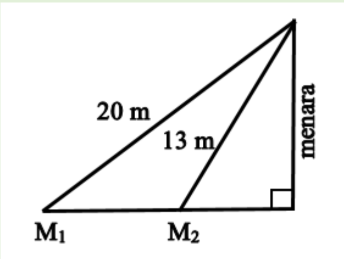
= $\sqrt{289}$

= 17

Jadi, panjang BC adalah 17 cm.

Tangga Bersandar pada Tembok Membentuk Segitiga Siku-siku – Freepik

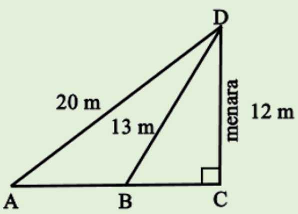
Contoh Soal:



Aca mengamati dua mobil dari puncak menara yang jarak masing-masingnya ke Aca seperti tampak pada gambar, Tentukan jarak dua mobil apabila diketahui tinggi menara adalah 12 m.

Pembahasan:

Perhatikan sketsa berikut.



Perhatikan segitiga siku-siku BCD. Panjang BC dapat ditentukan dengan teorema Pythagoras.

BC = $\sqrt{BD^2 - CD^2}$

= $\sqrt{13^2 - 12^2}$

= $\sqrt{169 - 144}$

= $\sqrt{25}$ = 5

Selanjutnya, perhatikan segitiga siku-siku ACD. Panjang AC dapat ditentukan dengan teorema Pythagoras.

AC = $\sqrt{AD^2 - CD^2}$

= $\sqrt{20^2 - 12^2}$

= $\sqrt{400 - 144}$

= $\sqrt{256}$ = 16

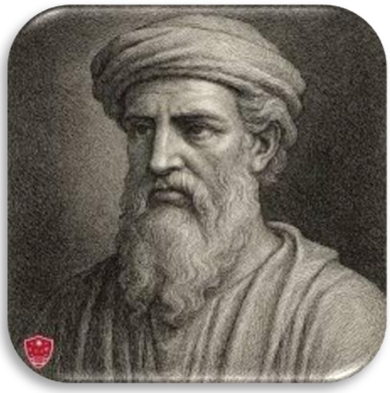
Jarak kedua mobil tersebut merupakan panjang AB, yaitu AB = AC – BC, sehingga

AB = 16 – 5 = 11

Jadi, jarak kedua mobil adalah 11 m.

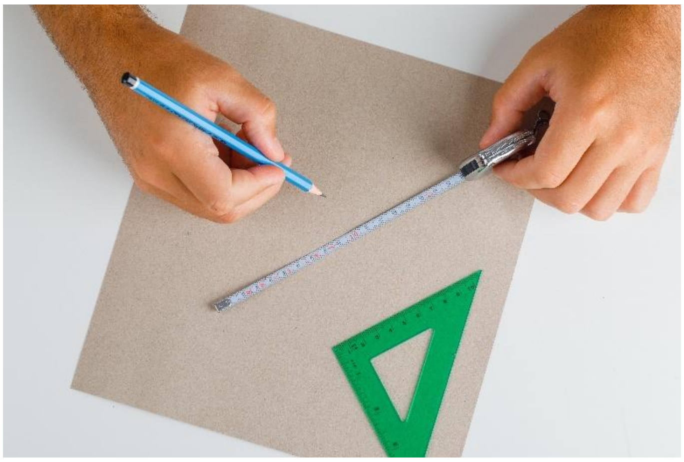
Pojok Matematika

Warisan Pythagoras



- Pythagoras dikenal luas sebagai salah satu tokoh penting dalam sejarah matematika, terutama karena kontribusinya terhadap teorema yang kini dikenal dengan namanya. Meskipun demikian, tidak terdapat satu pun catatan tertulis yang berasal langsung dari Pythagoras sendiri. Sebagian besar informasi mengenai ajaran dan pemikirannya diperoleh dari sumber sekunder, yaitu para pengikut dan murid-muridnya yang tergabung dalam komunitas yang dikenal sebagai Sekolah Pythagorean.
- Sekolah ini tidak hanya bersifat akademis, tetapi juga memiliki unsur keagamaan dan filosofis yang kuat. Ajaran-ajaran yang diwariskan oleh Pythagoras disampaikan secara lisan dan dianggap sebagai doktrin yang suci. Karena itu, dokumentasi terhadap pemikirannya baru dilakukan setelah wafatnya, dan lebih bersifat kolektif sebagai warisan intelektual kelompok, bukan sebagai karya individual. Banyak penemuan yang dikaitkan dengan nama Pythagoras kemungkinan besar merupakan hasil kolaborasi komunitas tersebut.
- Ketidakterlibatan Pythagoras secara langsung dalam penulisan karya ilmiah membuat sulit untuk membedakan mana ajaran asli dan mana yang merupakan tambahan atau penafsiran para murid. Namun demikian, kontribusi komunitas Pythagorean tetap menjadi fondasi penting dalam perkembangan matematika, khususnya dalam bidang geometri dan teori bilangan. Teorema Pythagoras sendiri menjadi warisan abadi yang membuktikan pengaruh mendalam dari pemikiran tersebut, meskipun tidak pernah ditulis secara langsung oleh tokoh utamanya.

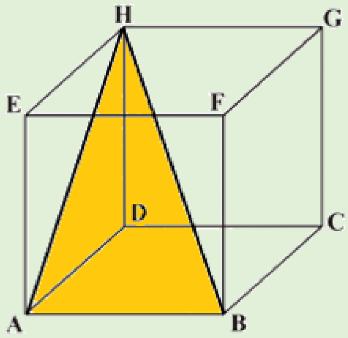
3. Penerapan Teorema Pythagoras pada Bangun Ruang



Seseorang Mengukur dengan Penggaris – Freepik

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Pada kubus ABCD,EFGH di atas, panjang rusuk AB = 8 cm. Hitunglah luas segitiga AHB.

Pembahasan:

Segitiga AHB merupakan segitiga siku-siku di sudut A. Pertama, akan dicari pajang AH terlebih dahulu. Perhatikan segitiga siku-siku AFH. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh

AH = $\sqrt{AE^2 - EH^2}$

= $\sqrt{8^2 - 8^2}$

= $\sqrt{8^2\ (1+1)}$

= $8\sqrt{2}$

Selanjutnya, dicari luas segitiga AHB.

$L_{AHB} = \frac{a \times t}{2}$

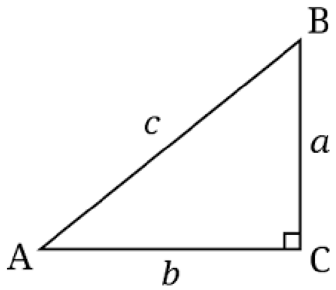
$= \frac{AB \times AH}{2}$

$= \frac{8 \times 8\sqrt{2}}{2}$

$= 32\sqrt{2}$

Jadi, luas segitiga AHB adalah $32\sqrt{2}$ cm^2.

4. Kebalikan Teorema Pythagoras



Apabila a, b, dan c sisi-sisi segitiga dengan c adalah sisi terpanjang, berlaku:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

maka besar sudut di hadapan sisi c adalah 90°.

Pembuktian Segitiga Lancip atau Tumpul

Secara sederhana, kebalikan dari Teorema Pythagoras menyatakan bahwa:

5) Jika sebuah segitiga memiliki tiga sisi yang panjangnya memenuhi hubungan $c^2 = a^2 + b^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku.

6) Jika suatu segitiga memiliki tiga sisi yang panjangnya memenuhi hubungan $c^2 < a^2 + b^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga lancip. Artinya, sisi miring (sisi terpanjang) segitiga harus lebih pendek daripada jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya.

7) Jika sebuah segitiga memiliki tiga sisi yang panjangnya memenuhi hubungan $c^2 > a^2 + b^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga tumpul. Artinya, sisi miring segitiga lebih panjang daripada jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya.

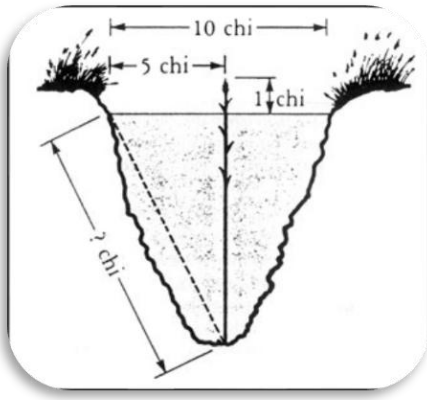
Penerapan Perhitungan Matematika – Freepik

Intusisi terhadap Pembuktian

Konsep kebalikan Teorema Pythagoras ini bisa lebih mudah dipahami jika dilihat secara intuitif. Dalam segitiga siku-siku, sisi miring adalah sisi terpanjang, dan sudut di depannya adalah sudut yang paling besar. Sebaliknya, dalam segitiga lancip, sisi miring tidak lebih panjang dari jumlah sisi lainnya, karena tidak ada sudut yang lebih besar dari 90 derajat. Sedangkan pada segitiga tumpul, sisi miring lebih panjang daripada jumlah sisi lainnya, karena adanya sudut lebih dari 90 derajat yang membuat sisi miring menjadi lebih panjang.

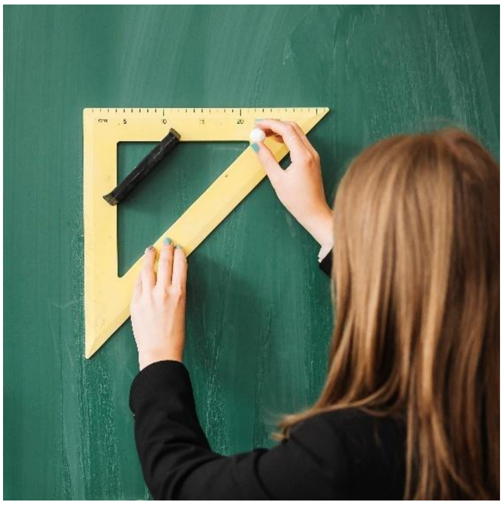
Pojok Matematika

Gou-Gu Theorem



- Di Tiongkok kuno, konsep yang serupa dengan Teorema Pythagoras dikenal dengan nama Gou-Gu Theorem. Istilah ini merujuk pada panjang sisi-sisi dalam segitiga siku-siku, yaitu gou untuk sisi tegak, gu untuk sisi mendatar, dan xian untuk sisi miring atau hipotenusa. Catatan mengenai teorema ini dapat ditemukan dalam teks matematika klasik Tiongkok, seperti Zhou Bi Suan Jing yang diperkirakan berasal dari abad ke-4 SM. Teks tersebut berisi penjelasan matematis serta penerapan geometri dalam konteks pengukuran astronomi dan survei lahan.
- Zhou Bi Suan Jing menunjukkan bahwa masyarakat Tiongkok kuno telah memahami hubungan kuadrat antara sisi-sisi segitiga siku-siku jauh sebelum matematika Yunani berkembang. Penjelasan dalam teks tersebut menyertakan bentuk awal pembuktian teorema melalui ilustrasi geometris, menunjukkan tingkat kecanggihan pemikiran matematis yang telah dicapai pada masa itu. Hubungan antara panjang sisi segitiga yang digambarkan dalam Gou-Gu Theorem secara esensial identik dengan hubungan yang tercantum dalam Teorema Pythagoras.
- Eksistensi Gou-Gu Theorem membuktikan bahwa pemahaman terhadap prinsip-prinsip dasar geometri bukanlah milik satu peradaban tertentu. Berbagai kebudayaan kuno, termasuk Tiongkok, telah mengembangkan konsep-konsep matematika yang serupa secara independen. Hal ini mencerminkan sifat universal dari matematika sebagai bahasa logika yang digunakan untuk memahami dan menjelaskan dunia di berbagai belahan dunia.

5. Menghitung Jarak pada Bidang Cartesius



Seseorang Menggunakan Penggaris Kayu Segitiga – Freepik

Pada bidang Cartesius, terdapat dua garis berpotongan tegak lurus yang masing-masing dapat dipandang sebagai garis bilangan. Sistem koordinat ini terdiri dari dua sumbu: sumbu x (horizontal) dan sumbu y (vertikal), yang bertemu di titik asal (0, 0). Dalam sistem ini, titik-titik dapat digambarkan pada bidang datar, dan jarak antar titik dapat dihitung dengan menggunakan prinsip dasar Teorema Pythagoras.

Menghitung Jarak antara Dua Titik

Salah satu aplikasi utama Teorema Pythagoras pada Bidang Cartesius adalah menghitung jarak antara dua titik. Misalkan terdapat dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) pada bidang Cartesian. Jarak antara kedua titik dapat dihitung dengan menggunakan rumus hasil penerapan Teorema Pythagoras pada segitiga yang terbentuk oleh kedua titik tersebut.

Rumus jarak antara dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) adalah sebagai berikut:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Rumus ini merupakan bentuk langsung dari Teorema Pythagoras, di mana selisih antara koordinat x-nya membentuk satu sisi segitiga siku-siku, dan selisih antara koordinat y-nya membentuk sisi lainnya.

Jarak pada Titik yang Sejajar dengan Sumbu

Jika kedua titik terletak pada garis yang sejajar dengan salah satu sumbu (sumbu x atau sumbu y), perhitungan jarak menjadi lebih sederhana.

8) Titik sejajar dengan sumbu x

   Jika dua titik terletak pada garis yang sejajar dengan sumbu x, maka perbedaan koordinat y-nya adalah 0, dan jaraknya hanya dihitung berdasarkan perbedaan x-nya:

$$d = |x_2 - x_1|$$

9) Titik sejajar dengan sumbu y

   Jika dua titik terletak pada garis yang sejajar dengan sumbu y, maka perbedaan koordinat x-nya adalah 0, dan jaraknya hanya dihitung berdasarkan perbedaan y-nya:

$$d = |y_2 - y_1|$$

Jarak ke Titik Asal

Seringkali diperlukan untuk menghitung jarak suatu titik ke titik asal (0, 0) pada sistem koordinat Cartesius. Jarak dari titik A (x, y) ke titik asal O (0,0) dihitung dengan menggunakan rumus jarak yang sama seperti sebelumnya:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Contoh Soal:

Tentukan jarak dua titik berikut A(2, 3) dan B(5, 7).

Pembahasan:

Dengan menggunakan rumus jarak dua titik, maka:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Jadi, jarak AB = 5 satuan panjang.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan teorema Pythagoras diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang bagaimana penerapan, penghitungan, dan kebalikannya. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Pada segitiga ABC, dengan siku-siku di C, berlaku teorema Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

dengan BC = a, AB = c, dan AC = b. Sisi c dinamakan sisi miring atau hipotenusa, serta a dan b dinamakan sisi siku-siku.

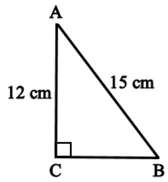
2) Diketahui segitiga ABC, dengan AB merupakan sisi terpanjang,

- ▷ Jika $AB^2 = BC^2 + AC^2$, maka segitiga ABC adalah segitiga siku-siku di C.
- ▷ Jika $AB^2 < BC^2 + AC^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga lancip di C.
- ▷ Jika $AB^2 = BC^2 + AC^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga tumpul di C.

Diketahui dua titik pada koordinat Cartesius. Misalkan titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2). Panjang ruas garis AB dihitung dengan:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

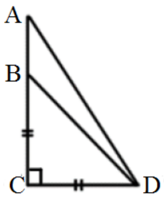
Latihan Soal

1. 

Panjang BC adalah ...

a. 3 cm
b. 6 cm
c. 4 cm
d. 8 cm
e. 9 cm

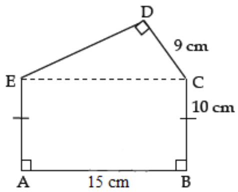
2. Perhatikan gambar berikut.



Diketahui CD = 8 cm dan AD = 17 cm. Panjang AB adalah ...

a. 8 cm
b. 7 cm
c. 6 cm
d. 5 cm
e. 4 cm

3. Perhatikan gambar berikut.



Keliling bangun ABCDE adalah ...

a. 56 cm
b. 60 cm
c. 64 cm
d. 74 cm
e. 86 cm

4. Seorang pengamat berada pada puncak menara dengan ketinggian 120 m. Ia melihat perahu A dengan jarak 130 m dan melihat perahu B dengan jarak 150 m. Jika dasar menara, perahu A, dan perahu B segaris, maka jarak perahu A ke perahu B adalah ...

a. 140 m
b. 90 m
c. 100 m
d. 50 m
e. 40 m

5. Sutan memiliki empat buah lidi yang masing-masing berukuran 4 cm, 5 cm, 9 cm, dan 10 cm. Dari keempat lidi tersebut akan dibuat segitiga. Segitiga yang mungkin dapat dibentuk Sutan dengan menggunakan lidi-lidi tersebut adalah ...

   a. sebuah segitiga tumpul

   b. sebuah segitiga lancip dan dua buah segitiga tumpul

   c. sebuah segitiga tumpul dan dua buah segitiga lancip

   d. dua buah segitiga tumpul

   e. dua buah segitiga lancip dan sebuah segitiga tumpul

6. Pada gambar berikut, PQR merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi 12 cm. S terletak tepat di tengah PQ. Panjang RS adalah ...

   a. $6\sqrt{3}$ cm d. 3 cm

   b. $2\sqrt{3}$ cm e. $3\sqrt{3}$

   c. 6 cm

7. Luas sebuah belah ketupat adalah 240 cm^2. Jika panjang salah satu diagonalnya 16 cm, maka keliling belah ketupat itu adalah adalah ...

   a. 48 cm d. 102 cm

   b. 68 cm e. 120 cm

   c. 92 cm

Referensi

Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Hermawan, S., & Fitriani, L. 2022. Pythagoras dan Peradaban Kuno: Sebuah Analisis Historis. Penerbit Erlangga.

Hidayat, R., & Pratama, I. 2022. Aplikasi Teorema Pythagoras pada Bangun Datar dan Ruang. Jurnal Geometri, 18(3), 75-90.

Khan, S. 2020. The Pythagorean Theorem and its Applications in Modern Geometry. Journal of Mathematics Education, 13(2), 105-121.

Kusumawati, R. 2021. Teorema Pythagoras dalam Konteks Sistem Koordinat Kartesius. Jurnal Matematika dan Pendidikan, 12(1), 65-77.

Pratama, I., & Adi, S. 2021. Gou Gu Theorem: Pythagoras dari Tiongkok. Jurnal Matematika dan Sejarah, 17(4), 156-169.

Sutrisno, D. 2022. Sejarah Pythagoras dan Kontribusinya dalam Matematika. Jurnal Sejarah Matematika, 15(3), 180-194.

Wang, L., & Zhao, H. 2020. The Gou Gu Theorem: A Chinese Approach to Pythagoras' Theorem. Journal of Historical Mathematics, 30(1), 134-149.

Zhao, H., & Li, J. 2022. Applications of Pythagorean Theorem in 3D Geometry. International Journal of Geometry and Algebra, 34(5), 212-228.

BAB 6

TRANSFORMASI GEOMETRI

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Bernalar Kritis**

Mampu menganalisis dan mengidentifikasi transformasi geometri, meliputi pergeseran (translasi), perputaran (rotasi), pencerminan (refleksi), dan perbesaran (dilatasi).

Kata Kunci: Bayangan, Dilatasi, Refleksi, Rotasi, Transformasi Geometri, Translasi.

Tujuan Pembelajaran: Menjelajahi Bentuk Transformasi Geometri

1. Memahami definisi transformasi geometri.

▷ Menjelaskan pengertian dan konsep tranformasi geometri.

▷ Mengidentifikasi setiap perubahan geometri, meliputi pergeseran (translasi), perputaran (rotasi), pencerminan (refleksi), dan perbesaran (dilatasi).

2. Menjelaskan sifat transformasi geometri.

▷ Menjelaskan sifat-sifat bayangan hasil transformasi geometri (pergeseran, perputaran, pencerminan, dan perbesaran).

▷ Memahami perbedaan sifat-sifat bayangan hasil transformasi (pergeseran, perputaran, pencerminan, dan perbesaran).

3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan transformasi geometri.

- ▷ Mengembangkan model matematika untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan geometri (pergeseran, perputaran, pencerminan, dan perbesaran).
- ▷ Menerapkan teori matematika dalam berbagai permasalahan yang ditemui di kehidupan nyata.

1. Masalah Pengubinan

Ubin – Freepik

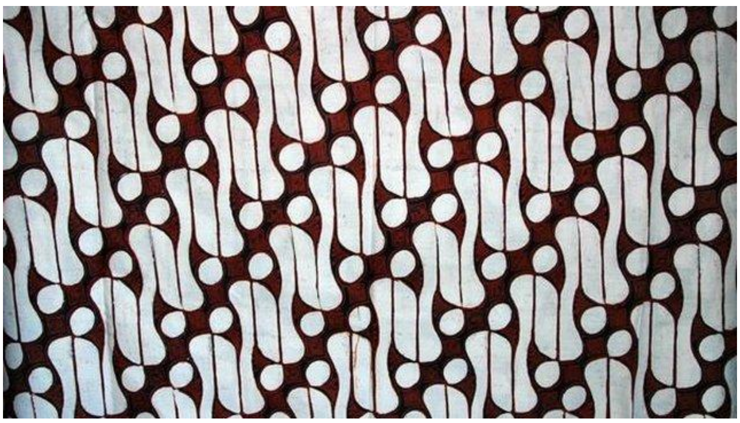
Pengubinan adalah proses menyusun bentuk-bentuk geometri secara berulang tanpa adanya celah maupun tumpang tindih, sehingga menutupi bidang secara sempurna. Bayangkan lantai rumah yang dipasangi keramik—setiap ubin dipasang sedemikian rupa sehingga bidang lantai tertutup rapat dan pola berulang terlihat rapi.

Secara sederhana, pengubinan dapat dianggap sebagai "pola ulang" dari suatu bentuk pada bidang datar. Bentuk ini akan digeser, diputar, atau dicerminkan, lalu diulang berkali-kali sampai bidang penuh.

Namun, tidak semua bangun datar dapat digunakan untuk pengubinan sempurna. Bentuk yang paling umum adalah poligon beraturan seperti segitiga sama sisi, persegi, dan heksagon beraturan. Sudut-sudut pada titik temu harus membentuk 360°.

Perubahan geometri seperti pergeseram, pencerminan, dan bahkan rotasi dapat terjadi pada catatan musik (not balok). Perhatikan pola not balok yang mengalami pergeseran pada gambar berikut.

Selain notasi balok, perubahan geometri terdapat pada motif batik yang melibatkan bentuk garis, bangun datar, atau ornamen-ornamen yang sarat akan makna. Pada seni batik kuno, terdapat banyak motif lukisan yang dibentuk menggunakan transformasi. Pola batik parang pada gambar berikut memuat bentuk bangun dan garis yang diproses dengan cara digeser ke kanan dan ke atas.



Pojok Matematika

Puzzle Tangram

- Permainan puzzle tangram merupakan permainan tradisional yang berasal dari Tiongkok dan terdiri atas tujuh keping geometri, yaitu lima segitiga dengan ukuran berbeda, satu persegi, dan satu jajaran genjang. Setiap keping dapat disusun menjadi berbagai bentuk, mulai dari gambar hewan, manusia, hingga objek sehari-hari. Prinsip dasar permainan ini terletak pada penggunaan tiga jenis transformasi geometri, yaitu translasi, rotasi, dan refleksi, untuk memindahkan dan menyesuaikan posisi keping agar membentuk gambar yang diinginkan.
- Dalam proses penyusunan tangram, translasi digunakan untuk menggeser keping dari satu posisi ke posisi lain tanpa mengubah bentuk atau ukurannya. Rotasi diterapkan untuk memutar keping dengan sudut tertentu, biasanya kelipatan 90° atau 180°, agar sesuai dengan posisi yang diperlukan dalam gambar. Sementara itu, refleksi digunakan untuk membalik keping, sehingga dapat menyesuaikan bentuknya dengan sisi atau sudut yang berlawanan. Kombinasi ketiga transformasi ini memberikan fleksibilitas dalam menghasilkan bentuk-bentuk kreatif dari keping yang sama.
- Selain menjadi permainan yang menghibur, tangram memiliki nilai edukatif yang tinggi. Aktivitas menyusun keping dapat melatih kemampuan visual-spasial, logika, serta kreativitas. Penggunaan translasi, rotasi, dan refleksi secara langsung juga membantu pemahaman konsep transformasi geometri dalam konteks nyata. Oleh karena itu, tangram sering dimanfaatkan sebagai media pembelajaran matematika yang efektif, terutama dalam mengenalkan konsep simetri, kesebangunan, dan keteraturan bentuk.

2. Pergeseran (Translasi)

Sepeda Bergerak – Freepik

Secara umum, pergeseran ke kanan atau ke kiri akan ditulis dalam bentuk $\binom{a}{0}$, tergantung nilai a positif atau negatif.

Selain pergeseran ke kanan atau ke kiri, pergeseran juga dapat berupa pergeseran ke atas atau ke bawah. Secara umum, pergeseran ke atas atau ke bawah ditulis dalam bentuk $\binom{0}{b}$, tergantung nilai b positif atau negatif.

Pergeseran merupakan kombinasi ke kanan/kiri dan atas/bawah yang dituliskan sebagai $\binom{a}{b}$.

Apabila titik awal adalah P(x, y), setelah translasi oleh vektor $\binom{a}{b}$, titik menjadi:

$$P'(x', y') = (x + a, y + b)$$

Contoh Soal

Sebuah persegi dengan titik sudut A(1, 1), B(4, 1), C(4, 4), dan D(1, 4) digeser sejauh 2 satuan ke kiri dan 5 satuan ke atas. Tentukan koordinat hasilnya.

Pembahasan:

Posisi titik-titik pada persegi ABCD setelah mengalami pergeseran adalah sebagai berikut.

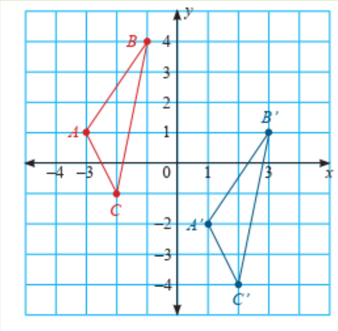
Titik A(1, 1) digeser sejauh $\binom{-2}{5}$, menjadi A'(1 – 2, 1 + 5) = (–1, 6)

Titik B(4, 1) digeser sejauh $\binom{-2}{5}$, menjadi B'(4 – 2, 1 + 5) = (2, 6)

Titik C(4, 4) digeser sejauh $\binom{-2}{5}$, menjadi C'(4 – 2, 4 + 5) = (2, 9)

Titik D(1, 4) digeser sejauh $\binom{-2}{5}$, menjadi D'(1 – 2, 4 + 5) = (–1, 9)

Contoh Soal



Segitiga ABC mengalami translasi atau pergeseran hingga berada di posisi A'B'C'. Tentukan vektor translasi segitiga tersebut.

Pembahasan:

Untuk menentukan jumlah translasi segitiga ABC, dapat dihitung jarak satuan antara segitiga ABC dengan A'B'C' ke arah sumbu x dan sumbu y.

Misalnya, tentukan satu titik untuk diamati, yaitu titik A. Koordinat A = (-3,1), sedangkan koordinat A' = (1, −2). Berdasarkan rumus translasi, jumlah pergeseran dapat dicari dengan cara:

A(x, y) digeser sejauh $\binom{a}{b}$, menjadi A'(x', y')

Titik A(–3, 1) digeser sejauh $\binom{a}{b}$, menjadi A'(1, –2).

Mencari nilai masing-masing a dan b.

$-3 + a = 1$

$a = 1 + 3$

$a = 4$

$1 + b = b - 2$

$b = -2 - 1$

$b = -3$

Jadi, vektor translasi segitiga ABC adalah $\binom{4}{-3}$, artinya segitiga ABC mengalami pergeseran sejauh 4 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah.

Pojok Matematika

Translasi pada Eskalator

- Gerakan pada eskalator membawa penumpang berpindah posisi secara lurus ke arah tertentu, baik ke atas maupun ke bawah, tanpa mengubah orientasi tubuh terhadap arah pandang. Seluruh bagian tangga bergerak dengan kecepatan konstan, sehingga setiap titik pada penumpang mengalami perpindahan sejajar dengan jarak yang sama dalam selang waktu tertentu. Prinsip ini sejalan dengan definisi translasi, yaitu pergeseran suatu objek tanpa rotasi maupun perubahan bentuk.
- Arah translasi pada eskalator selalu tetap, ditentukan oleh mekanisme penggerak dan jalur lintasan tangga. Eskalator yang bergerak ke atas memindahkan penumpang dari lantai bawah ke lantai atas dalam garis lintasan yang miring, sedangkan eskalator ke bawah melakukan perpindahan sebaliknya. Kecepatan pergerakan biasanya diatur agar selaras dengan kenyamanan dan keselamatan penumpang. Selama proses translasi ini, orientasi penumpang terhadap lingkungan sekitar tidak berubah, sehingga posisi tubuh tetap menghadap ke arah awal meskipun lokasi berpindah.
- Eskalator dapat menjadi ilustrasi yang efektif untuk memahami konsep translasi dalam kehidupan sehari-hari. Pergerakan yang konstan dan terarah memudahkan pengamatan sifat-sifat translasi, seperti kesebangunan bentuk, jarak perpindahan, dan arah gerak. Pemanfaatan eskalator sebagai contoh visual menunjukkan bahwa prinsip translasi tidak hanya berlaku pada objek geometri di bidang gambar, tetapi juga diterapkan pada teknologi yang menunjang mobilitas manusia.

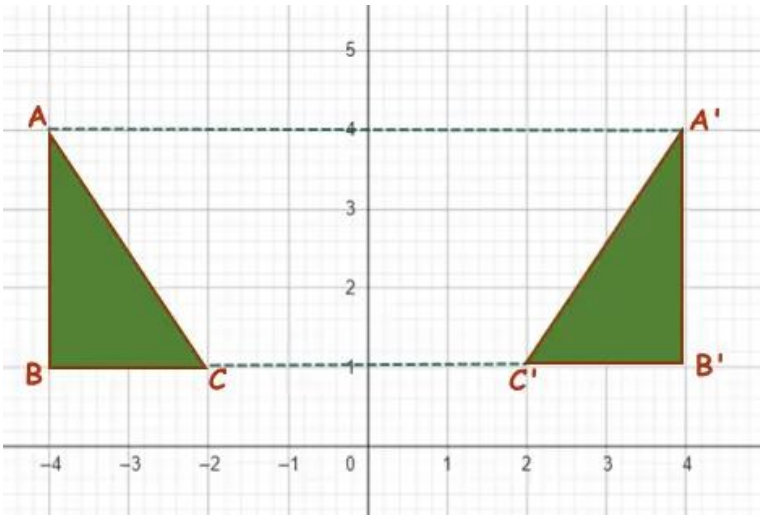
3. Percerminan (Refleksi)

Bayangan Hasil Pencerminan

Dalam kehidupan sehari-hari, dapat dilihat berbagai bentuk pencerminan. Perhatikan gambar berikut.

Contoh Pencerminan – Freepik

Dalam Matematika, pencerminan dapat dilakukan seperti pada gambar berikut.



Cermin dianggap sebagai sebuah garis dan dapat bekerja dua sisi. Benda di sebelah kiri cermin akan menghasilkan bayangan di kanan cermin. Sementara itu, benda di kanan cermin akan menghasilkan bayangan di kiri cermin.

Menentukan Cermin pada Pencerminan

Pada pembahasan ini, akan menentukan cermin atau dinamakan sebagai garis simetri. Garis cermin adalah garis yang tegak lurus terhadap garis penghubung tersebut dan membagi dua sama panjang.

Misal terdapat titik A(2, 3) dicerminkan menjadi A'(4, 3). Untuk mengetahui garis cermin, gunakan titik tengah pada koordinat, yaitu titik (4, 3). Garis yang tegak lurus pada sumbu x di titik tengah adalah garis x = 4, maka itulah garis cerminnya.

Pencerminan Berurutan

Contoh Soal

Diketahui titik A(3, 2)

a. Tentukan bayangan titik A jika dicerminkan terhadap garis x = 2.

b. Tentukan bayangan titik hasil pada soal (a) jika dicerminkan terhadap garis x = 6.

Pembahasan:

a. Pencerminan terhadap garis x = 2

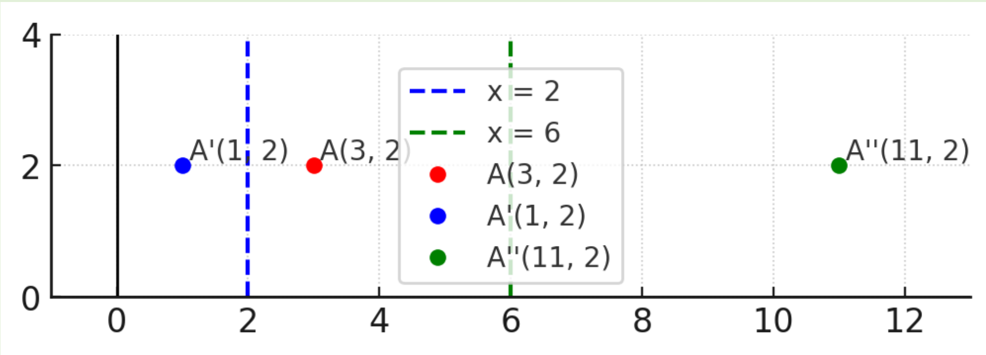
Titik A(3, 2) maka jarak titik A ke garis x = 2 adalah 1 satuan (ke kanan garis). Bayangan akan berada di sisi kiri garis x = 2 dengan jarak garis yang sama: 1 satuan.

Sementara itu, koordinat y tetap, sehingga A' berada pada titik A'(1, 2).

b. Pencerminan A' terhadap garis x = 6

Titik A'(1, 2) maka jarak titik A ke garis x = 6 adalah 5 satuan (ke kiri garis). Bayangan akan berada di sisi kanan garis x = 6 dengan jarak garis yang sama: 6 + 5 = 11 satuan.

Sementara itu, koordinat y tetap, sehingga A" berada pada titik A"(11, 2).



4. Perputaran (Rotasi)

Contoh Penerapan Rotasi – Freepik

Pengertian Rotasi

Rotasi adalah transformasi geometri yang memutar suatu bangun datar mengelilingi titik tertentu (disebut titik pusat rotasi) dengan sudut tertentu dan arah tertentu). Arah rotasi dapat searah jarum jam (negatif) atau berlawanan arah jarum jam (positif).

Transformasi geometri atau perubahan geometri rotasi dengan pusat O sebesar sudut α (dibaca alpha) mengubah titik A menjadi A".

Dalam rotasi, besar sudut mempunyai arah berlawanan jarum jam.

Simetri Rotasi

Terdapat benda yang jika dirotasi dengan sudut atau pusat tertentu tampak tidak berubah posisi. Kondisi benda yang hanya tidak tampak berubah posisi jika diputar 360° dianggap tidak mempunyai simetri putar atau simetri rotasi. Ukuran simetri rotasi biasanya dinyatakan sebagai derajat rotasi terkecil yang membuat bangun kembali sama. Perhatikan contoh berikut.

8) Persegi memilki rotasi 90°, 180°, 270°, dan 360°. Benda seperti ini disebut memiliki simetri orde 4.

9) Segitiga sama sisi memiliki simetri rotasi 120°, 240°, dan 360°. Benda seperti ini disebut memiliki simetri rotasi orde 3.

10) Lingkaran, memiliki simetri rotasi tidak terbatas (setiap sudut akan berhimpit).

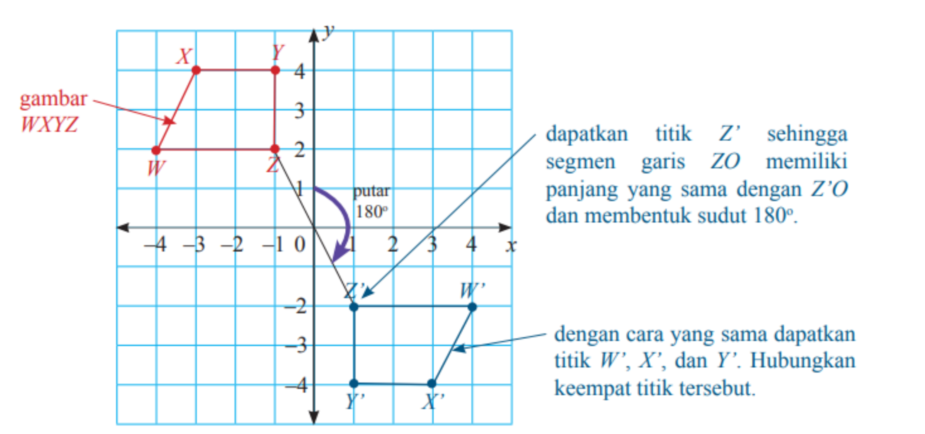
Untuk mengetahui jumlah order simetri rotasi, dapat digunakan rumus berikut.

$$\text{Orde} = \frac{360°}{sudut\ rotasi\ terkecil}$$

Contoh Soal

Tentukan bayangan trapesium WXYZ dengan koordinat W (–4, 2), X (–3, 4), Y (–1, 4) dan Z (–1, 2) pada rotasi 180° dengan pusat rotasi O (0, 0).

Pembahasan:



Jadi, koordinat bayangannya W' (4, –2), X' (3, –4), Y' (1, –4) dan Z' (1, –2).

Pojok Matematika

Rotasi Gerakan Jarum Jam

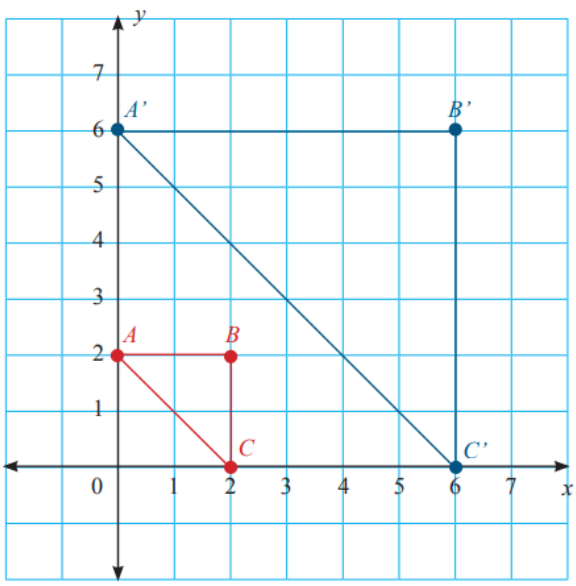
- ▷ Gerakan pada eskalator membawa penumpang berpindah posisi secara lurus ke arah tertentu, baik ke atas maupun ke bawah, tanpa mengubah orientasi tubuh terhadap arah pandang. Seluruh bagian tangga bergerak dengan kecepatan konstan, sehingga setiap titik pada penumpang mengalami perpindahan sejajar dengan jarak yang sama dalam selang waktu tertentu. Prinsip ini sejalan dengan definisi translasi, yaitu pergeseran suatu objek tanpa rotasi maupun perubahan bentuk.
- ▷ Arah translasi pada eskalator selalu tetap, ditentukan oleh mekanisme penggerak dan jalur lintasan tangga. Eskalator yang bergerak ke atas memindahkan penumpang dari lantai bawah ke lantai atas dalam garis lintasan yang miring, sedangkan eskalator ke bawah melakukan perpindahan sebaliknya. Kecepatan pergerakan biasanya diatur agar selaras dengan kenyamanan dan keselamatan penumpang. Selama proses translasi ini, orientasi penumpang terhadap lingkungan sekitar tidak berubah, sehingga posisi tubuh tetap menghadap ke arah awal meskipun lokasi berpindah.
- ▷ Eskalator dapat menjadi ilustrasi yang efektif untuk memahami konsep translasi dalam kehidupan sehari-hari. Pergerakan yang konstan dan terarah memudahkan pengamatan sifat-sifat translasi, seperti kesebangunan bentuk, jarak perpindahan, dan arah gerak. Pemanfaatan eskalator sebagai contoh visual menunjukkan bahwa prinsip translasi tidak hanya berlaku pada objek geometri di bidang gambar, tetapi juga diterapkan pada teknologi yang menunjang mobilitas manusia.

5. Dilatasi

Kamera Menggunakan Konsep Dilatasi – Freepik

Setelah mempelajari perubahan geometri atau transformasi geometri yang hanya mengubah posisi, akan dibahas mengenai perubahan geometri yang mengakibatkan perubahan ukuran tetapi bentuknya tetap atau disebut sebangun. Transformasi geometri yang mampu memperbesar atau memperkecil ukuran suatu bangun dengan skala tertentu terhadap suatu titik pusat, tanpa mengubah bentuknya dinamakan dilatasi.

Dilatasi terhadap titik pusat merupakan perkalian dari koordinat tiap-tiap titik pada suatu bangun datar dengan faktor skala sebesar k. Faktor skala menentukan apakah suatu dilatasi merupakan pembesaran atau pengecilan. Secara umum dilatasi dari suatu koordinat (x, y) dengan faktor skala k akan menghasilkan koordinat (kx, ky) atau dapat ditulis $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$. Ketika $k > 1$ maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pembesaran, tetapi jika $0 < k < 1$ maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pengecilan. Untuk memperbesar atau memperkecil bangun, letak pusat dilatasi dapat di dalam, di luar, atau pada tepi bangun yang akan didilatasikan.



Secara umum, misalkan diketahui segitiga ABC, dengan $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, dan $C(x_C, y_C)$. Jika segitiga ABC didilatasi k kali (k dapat bilangan negatif) dengan pusat 0, bayangannya adalah segitiga A'B'C', dengan $A'(x_{A'}, y_{A'})$, $B'(x_{B'}, y_{B'})$. dan $C'(x_{C'}, y_{C'})$ dan hubungan koordinatnya adalah $x_{A'} = kx_{A'}$, $y_{A'} = ky_{A'}$, $x_{B'} = kx_{B'}$, $y_{B'} = ky_{B'}$, $x_{C'} = kx_{C'}$, dan $y_{C'} = ky_{C'}$

Contoh Soal

Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut masing-masing A (1, 3), B (2, 3), dan C (2, 1). Gambar segitiga ABC dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 3 dengan pusat dilatasi titik awal.

Pembahasan:

Koordinat titik:

A'(k × 1, k × 3) = A'(3 × 1, 3 × 3)

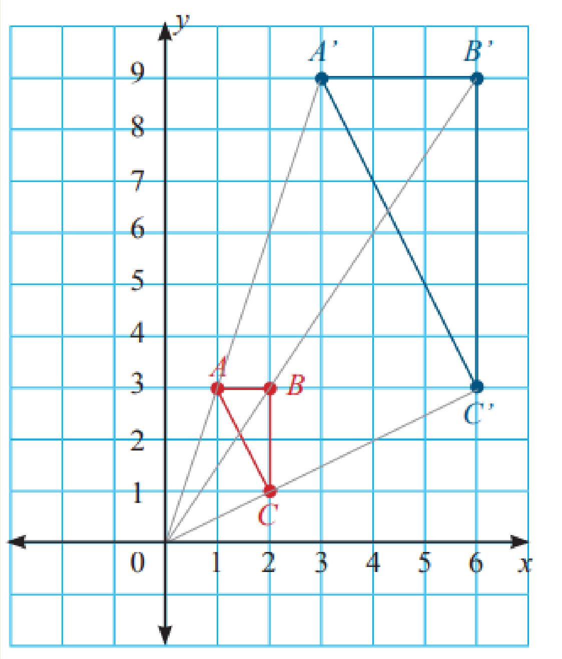
= A'(3, 9)

B'(k × 2, k × 3) = B'(3 × 2, 3 × 3)

= B'(6, 9)

C'(k × 2, k × 1) = C'(3 × 2, 3 × 1)

= C'(6, 3)



Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan tranformasi geometri diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Pada geometri transformasi, bentuk dasar benda tidak berubah. Perubahan hanya terjadi pada kedudukan benda dan ukuran.

2) Geometri transformasi meliputi pergeseran (translasi), perputaran (rotasi), pencerminan (refleksi), dan perbesaran (dilatasi).

3) Pergeseran (translasi) dituliskan dalam bentuk vektor sebagai berikut.

   ▷ Pergeseran ke kanan atau ke kiri akan ditulis dalam bentuk $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ tergantung nilai a positif atau negatif.

   ▷ Pergeseran Ke atas atau ke bawah ditulis dalam bentuk $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ tergantung nilai b positif atau negatif.

   ▷ Pergeseran yang merupakan kombinasi ke kanan/kiri dan atas/bawah dituliskan sebagail $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$.

4) Pada pencerminan, cermin dianggap berbentuk satu garis dan dapat bekerja dua sisi. Benda di sebelah kiri cermin akan menghasilkan bayangan di kanan cermin. Sementara itu, benda di kanan cermin akan menghasilkan bayangan di kiri cermin. Jarak benda ke cermin sama dengan jarak bayangan ke cermin.

5) Rotasi merupakan pencerminan suatu benda terhada dua garis yang saling berpotongan dengan pusat rotasi adalah titik potong kedua garis, besar sudut rotasi sama dengan dua kali besar sudut antara dua garis yang saling berpotongan tersebut.

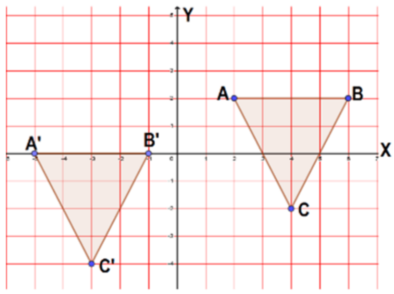
6) Benda yang tidak berubah posisi jika diputar dengan pusat yang sama dan sudut sejauh 90°, 180°, 270°, dan 360° disebut mempunyai simetri rotasi orde 4. Benda yang hanya tampak tampak berubah posisi jika diputar 360°, dianggap tidak mempunyai simetri putar atau simetri rotasi.

7) Dilatasi adalah transformasi geometri yang mengakibatkan perubahan ukuran, tetapi bentuknya tetap atau disebut sebangun.

8) Diketahui segitiga ABC, dengan A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), dan C (x_C, y_C). Jika segitiga ABC didilatasi k kali (k dapat bilangan negatif) dengan pusat 0, bayangannya adalah segitiga A'B'C', dengan A'($x_{A'}$, $y_{A'}$), B'($x_{B'}$, $y_{B'}$). dan C'($x_{C'}$, $y_{C'}$) dan hubungan koordinatnya adalah $x_{A'} = kx_{A'}$, $y_{A'} = ky_{A'}$, $x_{B'} = kx_{B'}$, $y_{B'} = ky_{B'}$, $x_{C'} = kx_{C'}$, dan $y_{C'} = ky_{C'}$.

Latihan Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



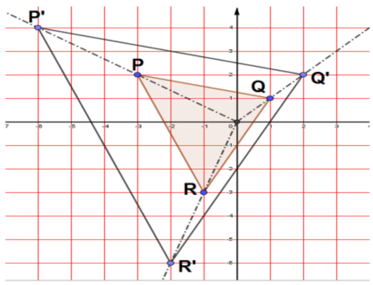
Transformasi yang ditunjukan gambar di atas adalah ...

a. Pencerminan terhadap y = x
b. Translasi oleh (-7, -2)
c. Rotasi 180°
d. Dilatasi –2
e. Translasi oleh (0, –2)

2. Bayangan titik E(3, -5) setelah ditranslasikan oleh (-32) kemudian dicerminkan terhadap garis y=x adalah ...

a. E'(0, −3)
b. E'(−3, 0)
c. E'(3, −3)
d. E'(3, 0)
e. E'(0, 3)

3. Perhatikan gambar berikut.

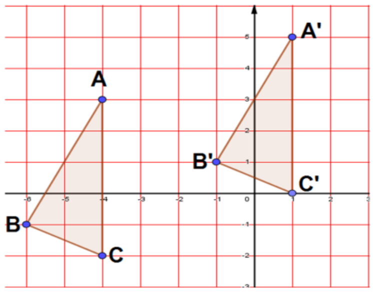


Hasil dilatasi segitiga PQR dengan pusat O(0,0) dan faktor skala 2 yang ditunjukkan gambar di atas adalah ...

a. P'(-6, 4), Q'(2, 2) dan R'(2, 6)
b. P'(-6, 4), Q'(-2, 2) dan R'(2, -6)
c. P'(6, 4), Q'(2, 2) dan R'(-2, -6)
d. P'(-6, 4), Q'(2, 2) dan R'(-2, -6)
e. P'(-6, 4), Q'(2, -2) dan R'(-2, -6)

4. Bayangan titik F(5, 5) dicerminkan terhadap sumbu-X, kemudian ditranslasikan (-55) oleh dan terakhir didilatasikan oleh $\binom{0}{5}$ adalah ...

a. F'(0, 0)
b. F'(5, 0)
c. F'(0, 5)
d. F'(-10, 0)
e. F'(5, -5)

5. 

Perhatikan gambar di samping, segitiga ABC ditranslasikan oleh ...

a. $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

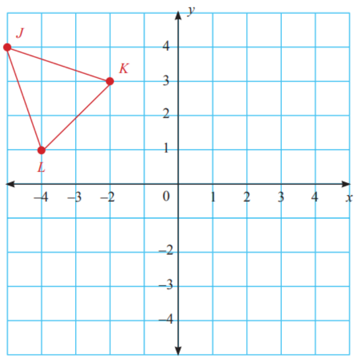
b. $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

6. Perhatikan gambar berikut.



Jika segitiga JKL dirotasi dengan pusat O(0, 0) sejauh 90° searah putaran jarum jam, maka koordinat J' adalah ...

a. (3, 2)

b. (1, 4)

c. (-5, 4)

d. (4, 1)

e. (4, 5)

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 9 BAB 6

Referensi

Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Cohen, J. M. & Harris, L. D. 2023. Transformations in Motion: Exploring Translational Geometry in Real-World Applications. Journal of Applied Geometry, 31(4), 340-352.

Haryanto, E., & Agus, M. 2023. Pembelajaran Transformasi Geometri dengan Pendekatan Realistik. Jurnal Pendidikan Matematika, 10(3), 190-198.

Johnson, C. A., & Leach, P. D. 2024. Rotational Symmetry and Motion: The Mathematics of Clocks and Timekeeping. Journal of Mathematical Physics, 65(2), 134-145.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. 2020. Matematika: Buku Siswa Kelas IX SMP/MTs.

Miller, R. L., & O'Neal, J. D. 2024. Modern Geometry: A Comprehensive Approach. 2nd ed. Springer.

Pijar Belajar. 2023. Transformasi Geometri: Pengertian, Jenis, dan Contoh Soal.

Pratama, B., & Nugraha, D. W. 2023. Penerapan Translasi pada Eskalator dan Sistem Gerak Lainnya di Fisika Terapan. Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan, 14(2), 118-126.

Smith, L. B., & Wilson, R. E. 2023. The Puzzle of Tangram: Transformations and Their Role in Problem Solving. Mathematics in Education, 58(3), 202-210.

Wijaya, Y., & Sihombing, T. 2024. Rotasi dan Translasi dalam Gerakan Jam dan Eskalator: Analisis Geometris dalam Kehidupan Sehari-hari. Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, 22(2), 150-160.

BAB 7
STATISTIKA

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Bernalar Kritis**

Mampu menganalisis dan mengidentifikasi ukuran pemusatan data meliputi rata-rata (mean), median, dan modus, serta ukuran penyebaran data meliputi jangkauan, jangkauan antarkuartil, dan kuartil.

Kata Kunci: Jangkauan (Range), Jangkauan Antarkuartil, Kuartil, Median, Modus, Rata-rata (Mean), Ukuran Pemusatan Data, Ukuran Penyebaran Data

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Dunia Statistika

1. **Menentukan ukuran pemusatan data tunggal.**
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep rata-rata, modus, dan median
   - ▷ Mengidentifikasi setiap ukuran pemusatan data tunggal yang meliputi rata-rata, modus, dan median.

2. **Menjelaskan ukuran penyebaran data tunggal.**
   - ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep jangkauan (range), kuartil, dan jangkauan antarkuartil.
   - ▷ Memahami perbedaan jangkauan (range), kuartil, dan jangkauan antarkuartil.

3. **Membandingkan suatu data terhadap kelompok data lain.**
   - ▷ Membandingkan data dan mengambil keputusan.
   - ▷ Menggunakan kumpulan data dalam kehidupan sehari-hari.

4. Menyajikan rangkuman data dalam bentuk boxplot.

- ▷ Menyajikan dan memvisualisasikan data dalam bentuk boxplot.
- ▷ Menginterpretasikan data yang ada dalam kehidupan sehari-hari dalam bentuk diagram.

F I T R I

1. Ukuran Pemusatan Data

Berbagai Macam Penyajian Data Statistik – Freepik.com

Ukuran pemusatan data adalah ukuran atau nilai yang mewakili atau menggambarkan pusat dari suatu kumpulan data. Ukuran pemusatan data terdiri atas rata-rata hitung (mean), modus, dan median.

Rata-Rata Hitung (Mean)

Rata-rata hitung, atau *mean*, merupakan ukuran pemusatan data yang diperoleh dengan membagi jumlah seluruh nilai data dengan banyaknya data. Ukuran ini digunakan untuk menggambarkan nilai yang mewakili keseluruhan data secara numerik.

Secara umum, rata-rata hitung cocok digunakan untuk data kuantitatif, baik data tunggal maupun data berkelompok. Namun, hasil rata-rata hitung dapat dipengaruhi secara signifikan oleh adanya nilai ekstrem yang berbeda dalam kumpulan data.

$$\text{Rata-rata hitung (mean)} = \frac{jumlah\ nilai\ dari\ data}{banyak\ data}$$

Contoh Soal

1. Nilai empat kali ulangan Matematika Arya adalah 7, 7, 8, dan 6. Tentukan rata-rata nilai ulangan Arya.

   Pembahasan:

   $$\text{Rata-rata} = \frac{jumlah\ semua\ nilai\ dari\ data}{banyak\ data}$$
   $$= \frac{7+7+8+6}{4}$$
   $$= 7$$

   Jadi, rata-rata nilai ulangan Arya adalah 7.

2. Nilai rata-rata tiga kali ulangan Bahasa Inggris Bunga bulan lalu adalah 6,5. Bulan ini, ada empat ulangan Bahasa Inggris dan nilai rata-rata Bunga adalah 7. Tentukan nilai rata-rata keseluruhan Bunga.

   Pembahasan:

   Nilai rata-rata ulangan bulan lalu:

   $$\text{Rata-rata} = \frac{jumlah\ semua\ nilai\ bulan\ lalu}{banyak\ data}$$
   $$6{,}5 = \frac{jumlah\ semua\ nilai\ bulan\ lalu}{4}$$

   Jumlah nilai bulan lalu = 4 × 6,5 (kalikan kedua ruas dengan 4)

   = 26

Dengan cara yang sama, nilai ulangan bulan ini:

Rata-rata = $\frac{jumlah\ nilai\ bulan\ ini}{banyak\ data}$

$7 = \frac{jumlah\ nilai\ bulan\ ini}{3}$

Jumlah nilai bulan ini = 7 × 3 (kalikan kedua ruas dengan 4)

= 21

Berdasarkan kedua perhitungan tersebut, maka:

Jumlah semua nilai pada data = jumlah nilai bulan lalu + jumlah nilai bulan ini

= 26 + 21 = 47

Banyak data = banyak ulangan bulan lalu + bulan ini

= 4 + 3 = 7

Rata-rata keseluruhan sebagai berikut.

Rata-rata = $\frac{jumlah\ semua\ nilai}{banyak\ data}$

$= \frac{47}{7}$

= 6,714

Jadi, nilai rata-rata keseluruhan adalah 6,714.

Modus

Ukuran pemusatan data yang menunjukkan nilai atau kategori yang paling sering muncul dalam suatu kumpulan data) dinamakan modus. Modus digunakan untuk menggambarkan nilai yang paling mempunyai frekuensi paling besar.

Contoh Soal

Tentukan modus dari data berikut: 150, 155, 160, 155, 170, 155, 155, 165.

Pembahasan:

Modusnya adalah 155, sebab 155 paling banyak muncul, yaitu sebanyak 4 kali.

Median

Dua data yang sangat berbeda dapat mempunyai modus dan nilai rata-rata yang sama. Oleh karena itu, diperlukan ukuran lain untuk menggambarkan data. Ukuran data yang dimaksud adalah median, yaitu data yang berada tepat di tengah setelah diurutkan dari yang terkecil hingga terbesar.

Contoh Soal

Tentukan median dari set data berikut: 10, 15, 20, 19, 27, 16, 12, 30, 23.

Pembahasan:

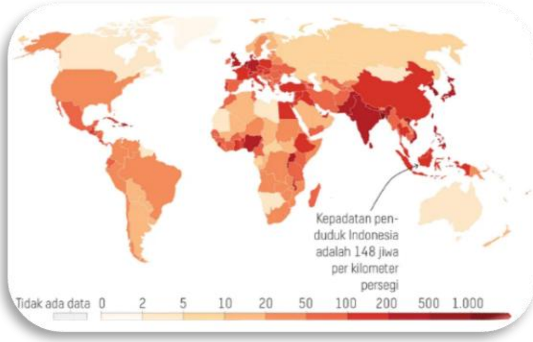
Untuk menentukan median, data perlu diurutkan terlebih dahulu.

10 12 15 16 19 20 23 27 30

Data yang terletak di tengah (median) adalah 19.

Pojok Matematika

Sensus Penduduk sebagai Penerapan Statistika



- Proses sensus penduduk melibatkan pengumpulan data dari seluruh penduduk suatu negara, kemudian data tersebut dikelompokkan, disajikan, dan dianalisis. Dengan cara ini, pemerintah tidak hanya mengetahui jumlah penduduk, tetapi juga dapat mempelajari distribusi umur, tingkat pendidikan, hingga pekerjaan masyarakat.
- Dalam statistika, data hasil sensus biasanya disajikan dalam bentuk tabel, grafik batang, atau diagram lingkaran agar lebih mudah dipahami. Misalnya, diagram lingkaran dapat menunjukkan persentase penduduk laki-laki dan perempuan, sedangkan grafik batang dapat menggambarkan jumlah penduduk berdasarkan kelompok usia. Penyajian data seperti ini mempermudah siapa saja untuk membaca informasi secara cepat dan jelas.
- Melalui pengolahan data sensus dengan metode statistika, pemerintah dapat mengambil keputusan yang lebih tepat. Contohnya, jika data menunjukkan peningkatan jumlah remaja, maka dapat diprediksi kebutuhan sekolah baru. Begitu juga jika grafik menunjukkan lonjakan jumlah penduduk usia lanjut, maka pemerintah perlu menambah fasilitas kesehatan. Inilah bukti bahwa statistika tidak hanya teori di buku pelajaran, melainkan alat penting yang membantu mengatur kehidupan masyarakat.

2. Ukuran Penyebaran Data Tunggal

Orang Menunjukkan Data Statistika – Freepik.com

Jangkauan (Range)

Jangkauan (range) yaitu selisih antara nilai tertinggi dan nilai terendah dalam suatu kumpulan data. Jangkauan dirumuskan sebagai:

$R = X_{msks} - X_{min}$

dengan R adalah range, X_{maks} adalah nilai tertinggi dalam data, dan X_{min} merupakan nilai terendah dalam data.

Contoh Soal

Diketahui data 67, 70, 72, 75, 80, 82, 88. Tentukan jangkauan dari data tersebut.

Pembahasan:

$X_{maks} = 88$

$X_{min} = 67$

$R = X_{maks} - X_{min}$

$= 88 - 67$

$= 21$

Jadi, jangkauan data tersebut adalah 21.

Kuartil

Kuartil merupakan ukuran letak yang membagi data yang telah diurutkan menjadi empat bagian yang sama besar. Kuartil digunakan untuk menggambarkan posisi data pada pembagian tertentu dan sering digunakan untuk menganalisis penyebaran data.

Perhatikan data berikut.

29, 30, 36, **38**, 39, 40, 43

Nilai tengah (median) data tersebut adalah 38. Median membagi data menjadi dua bagian sama banyak, yaitu bagian di kiri median dan bagian di kanan median.

Perhatikan data di kiri median, yaitu:

29, 30, 36

Nilai tengah data tersebut adalah 30. Nilai tengah dari setengah bagian data di kiri median dinamakan kuartil pertama atau kuartil bawah. Jadi, 30 merupakan nilai kuartil pertama dari data semula. Sementara nilai median dinamakan kuartil kedua data atau kuartil tengah semula.

Perhatikan data di kanan median, yaitu:

$$39, 40, 43$$

Nilai tengah data tersebut adalah 40. Nilai tengah dari setengah bagian data di kanan median dinamakan kuartil ketiga atau kuartil atas. Jadi, 40 merupakan nilai kuartil ketiga dari data semua.

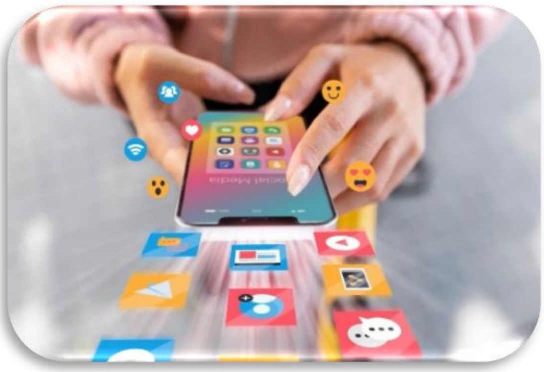
Range (jangkauan) antarkuartil adalah selisih kuartil ketiga dan kuartil pertama. Adapun simpangan kuartil adalah setengah kali jangkauan antarkuartil. Jadi, jangkauan antarkuartil pada data tersebut, yaitu:

$$Q_3 - Q_1 = 40 - 30 = 10$$

Sementara itu, simpangan kuartilnya = $\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(10) = 5$.

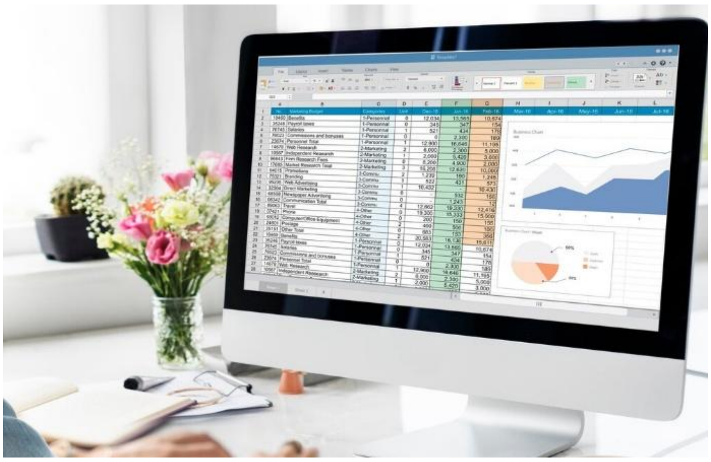
Pojok Matematika

Data di Media Sosial



- Polling di media sosial merupakan salah satu bentuk pengumpulan data yang sangat populer di era digital. Fitur ini memungkinkan setiap pengguna platform untuk memberikan suara pada pilihan yang tersedia, sehingga menghasilkan data kuantitatif yang merepresentasikan opini banyak orang. Data tersebut kemudian dapat dikumpulkan dalam waktu singkat dan dari jumlah responden yang sangat besar. Hal ini menjadikan polling sebagai sarana efektif untuk memperoleh gambaran umum mengenai preferensi masyarakat.
- Data yang diperoleh dari polling media sosial sering kali disajikan dalam bentuk persentase atau diagram batang sederhana, sehingga hasilnya dapat dipahami secara cepat. Dari sudut pandang statistika, data polling termasuk kategori data primer yang dikumpulkan secara langsung. Penyajian data tersebut bukan hanya memudahkan pengguna dalam memahami hasil, tetapi juga memberikan dasar untuk menganalisis kecenderungan atau tren yang sedang berkembang di kalangan masyarakat.
- Hasil polling dapat dimanfaatkan untuk berbagai tujuan, mulai dari hiburan, penelitian kecil, hingga strategi bisnis. Perusahaan, misalnya, dapat menggunakan hasil polling untuk mengetahui produk mana yang lebih diminati konsumen. Dengan demikian, polling media sosial tidak hanya berfungsi sebagai fitur interaktif, melainkan juga sebagai alat statistik praktis yang memiliki nilai penting dalam pengambilan keputusan berbasis data.

3. Data dalam Boxplot



Penyajian Data – Freepik.com

Boxplot (box-and-whisker plots) adalah diagram yang menyatakan 5 informasi penting dari suatu data, yaitu nilai terendah, kuartil pertama, kuartil kedua (median), kuartil ketiga, dan nilai tertinggi.

Contoh Soal

Diketahui data 43, 46, 50, 85, 56, 56, 67, 80, 67, 85, 43, 60, 80, 56, 67. Buatlah boxplot untuk data tersebut.

Pembahasan:

Data baru setelah diurutkan adalah sebagai berikut.

43, 43, 46, 50, 56, 56, 56, 60, 67, 67, 67, 80, 80, 85, 85

$X_{maks} = 85$

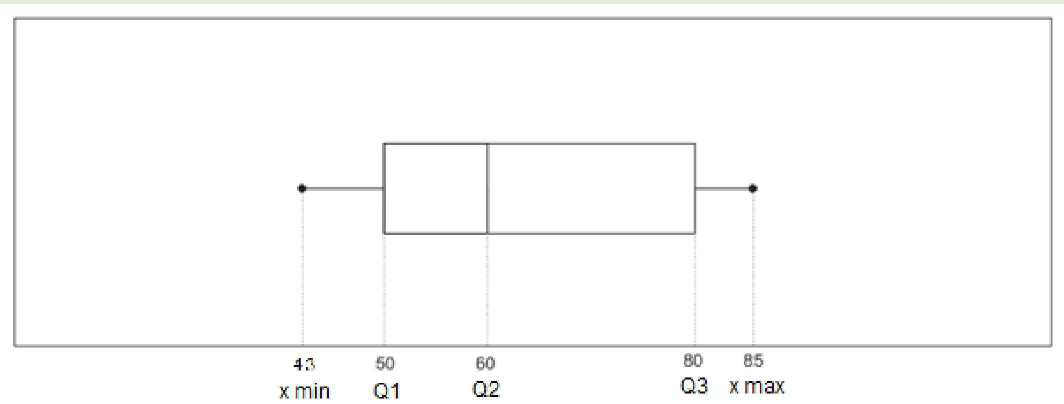
$X_{min} = 43$

$Q_1 = 50$

$Q_2 = 60$

$Q_3 = 80$

Boxplot dari data tersebut digambarkan sebagai berikut.



Pojok Matematika

Statistika dalam Prakiraan Cuaca

- Prediksi cuaca yang disampaikan setiap hari merupakan hasil pengolahan data statistik yang kompleks. Informasi mengenai curah hujan, suhu udara, arah angin, dan kelembapan udara dikumpulkan dari berbagai stasiun pengamatan. Data yang terkumpul dalam jumlah besar tersebut menjadi dasar penting untuk memprediksi kondisi cuaca pada hari-hari berikutnya. Tanpa adanya pengumpulan data secara sistematis, prediksi cuaca tidak dapat dilakukan secara akurat.
- Setelah data terkumpul, proses pengolahan dilakukan menggunakan metode statistika. Data historis mengenai curah hujan, misalnya, dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, pola musiman, dan kecenderungan tertentu. Hasil pengolahan ini kemudian dibandingkan dengan data terbaru, sehingga diperoleh kemungkinan terjadinya hujan atau cuaca cerah pada suatu wilayah. Penyajian hasil dalam bentuk grafik atau tabel membantu masyarakat memahami pola perubahan cuaca dengan lebih jelas.
- Analisis statistik tidak hanya memberikan informasi mengenai kemungkinan hujan, tetapi juga tingkat keakuratan prediksi. Semakin banyak data yang tersedia dan semakin cermat pengolahannya, semakin tinggi pula tingkat kepercayaan pada ramalan cuaca. Dengan demikian, peran statistika dalam meteorologi sangat penting, karena mampu mengubah data mentah tentang fenomena alam menjadi informasi yang bermanfaat bag perencanaan kegiatan masyarakat.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan statistika yang meliputi ukuran pemusatan dan penyebaran data diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang rata-rata, modus, median, jangkauan, jangkauan antarkuartil, dan kuartil. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

10) Ukuran pemusatan data tunggal
    - ▷ Rata-rata hitung (mean) = $\frac{jumlah\ nilai\ dari\ data}{banyak\ data}$.
    - ▷ Median adalah nilai tengah dari suatu data terurut.
    - ▷ Modus adalah nilai yang paling sering muncul dalam data.
11) Ukuran penyebaran data tunggal
    - ▷ Jangkauan (range) adalah selish antara nilai tertinggi dan nilai terendah dalam suatu kumpulan data. R = $X_{maks} - X_{min}$.
    - ▷ Kuartil adalah suatu nilai yang membagi sekumpulan data menjadi empat bagian, terdiri atas kuartil pertama, kuartil kedua, dan kuartil ketiga.
    - ▷ Jangkauan antarkuartil = kuartil ketiga – kuartil pertama.
12) Boxplot adalah diagram yang menggambarkan 5 informasi penting dari suatu data, yaitu nilai terendah, kuartil pertama, kuartil kedua (median), kuartil ketiga, dan nilai tertinggi.

Latihan Soal

1. Nilai rataan hitungan dari data 5, 7, 8, 9, 11, 11, 12, 13, 14, adalah ...

   a. 7
   b. 8
   c. 9
   d. 10
   e. 11

2. Modus dari data 67, 72, 69, 63, 72, 79, 67, 77, 67, 65 adalah ...

   a. 63
   b. 67
   c. 69
   d. 72
   e. 77

3. Median dari data 9, 4, 5, 3, 8, 7, 5, 6, 7, 4, 9, 7 adalah ...

   a. 3,5
   b. 4,5
   c. 5
   d. 6
   e. 6,5

4. Nilai rata-rata matematika dalam suatu kelas 72, sedangkan nilai rata-rata siswa pria 69 dan nilai rata-rata siswa wanita 74. Jika banyak siswa dalam kelas 40 orang, banyak siswa wanita adalah ...

   a. 24 orang
   b. 22 orang
   c. 20 orang
   d. 18 orang
   e. 16 orang

5. Perhatikan gambar berikut.

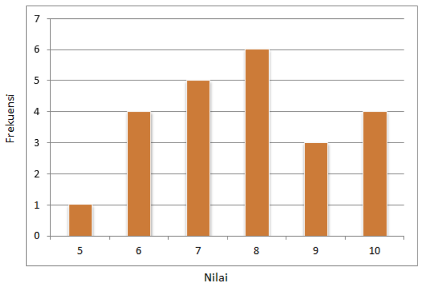


   Diagram batang di atas menunjukkan nilai ulangan Matematika. Banyak siswa yang mendapat nilai lebih dari 8 adalah...

   a. 3 orang
   b. 6 orang
   c. 7 orang
   d. 4 orang
   e. 13 orang

6. Perhatikan tabel berikut.

Jenis Bacaan	Banyak Siswa
Majalah	96
Koran	32
Buku Cerita	320
Komik	221

Buku Pengetahuan	328
Buku Pelajaran	87

Tabel di atas adalah jenis bacaan yang dipinjam dari perpustakaan. Selisih jenis bacaan paling banyak dan paling sedikit dipinjam oleh siswa adalah ...

a. 296
b. 297
c. 298
d. 295
e. 294

7. Perhatikan tabel data jumlah pengunjung objek wisata dalam satu pekan berikut.

Jenis Bacaan	Banyak Siswa
Senin	600
Selasa	450
Rabu	750
Kamis	650
Jumat	250
Sabtu	900
Minggu	950

Pengunjung objek wisata paling sedikit terjadi pada hari ...

a. Senin
b. Sabtu
c. Kamis
d. Rabu
e. Jumat

8. Diketahui data 11, 6, 7, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 12. Nilai kuartil 1 adalah …

a. 11
b. 10
c. 6
d. 12
e. 7

9. Berikut adalah data nilai ulangan Akuntansi beberapa orang siswa

65, 70, 67, 87, 60, 70, 78

Nilai Q_1, Q_2 dan Q_3 pada data tersebut berturut-turut adalah …

a. 67, 70, 75
b. 67, 78, 87
c. 65, 70, 78
d. 60, 70, 78
e. 65, 67, 70

10. Jangkauan Interkuartil dari data 12, 13, 11, 6, 4, 9, 3, 7, 6, 5, 9 adalah ...

a. 4
b. 5
c. 6
d. 11
e. 12

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 9 BAB 7

Referensi

Barrios, E., & Rivera, J. 2021. Population Surveys and Statistical Analysis. Springer.

Berrada, A., & Guedes, J. 2020. Statistical Methods for Weather Forecasting. Springer.

Budhi, Wono Setya. 2024. Matematika SMP/ MTs Kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Kemp, S. 2020. Digital 2020: Global Overview Report. Datareportal.

Moore, D. S., McCabe, G. P., & Craig, B. A. 2010. Introduction to the Practice of Statistics. 7th Edition. W.H. Freeman.

Setiawan, T. & Purnama, H. 2020. Analisis Data Sosial Media dengan Statistik. Jakarta: Elex Media Komputindo.

Sugiyono 2019. Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D. Bandung: Alfabeta.

Wilks, D. S. 2019. Statistical Methods in the Atmospheric Sciences. 4th Edition. Academic Press.

Yunita, M., & Suryani, D. 2018. Statistika untuk Pendidikan. Yogyakarta: Graha Ilmu.