



KELAS 8

MATEMATIKA

Pengenalan Relasi, Fungsi, dan Peluang:

Buku Pegangan Matematika untuk Siswa Kelas 8

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas terbitnya e-book Matematika ini yang merupakan bagian dari upaya menghadirkan pembelajaran yang lebih mudah diakses oleh seluruh pelajar Indonesia. Matematika adalah mata pelajaran yang mempelajari tentang pola pikir logis, keterampilan berhitung, serta kemampuan memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.

E-book ini disusun berdasarkan Capaian Pembelajaran Matematika Fase D (sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Nomor 008/H/KR/2022 Tentang Capaian Pembelajaran Pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah Pada Kurikulum Merdeka). Konten e-book ini dirancang agar peserta didik dapat memahami materi Matematika secara komprehensif, mengasah keterampilan berpikir kritis, serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain materi utama, e-book ini juga dilengkapi dengan latihan soal, pembahasan, serta tautan ke sumber belajar tambahan seperti video pembelajaran interaktif.

E-book ini merupakan bagian dari platform [Fitri](#), sebuah platform pembelajaran digital yang menyediakan akses gratis ke berbagai materi belajar, termasuk e-book, latihan soal, dan video pembelajaran interaktif untuk seluruh anak Indonesia. Fitri hadir sebagai wujud kontribusi nyata dalam mendukung pemerataan akses pendidikan berkualitas di Indonesia. Dengan semangat gotong royong dan inklusi, Fitri berkomitmen untuk membantu seluruh siswa, di mana pun berada, agar dapat belajar secara mandiri, efektif, dan menyenangkan. Hal ini selaras dengan tujuan besar pendidikan Indonesia, yaitu mewujudkan generasi yang cerdas, berkarakter, dan siap menghadapi tantangan zaman.

Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung tersedianya e-book ini. Semoga kehadiran e-book Matematika ini dapat memberikan manfaat nyata dalam proses belajar peserta didik dan turut berkontribusi dalam meningkatkan literasi bangsa.

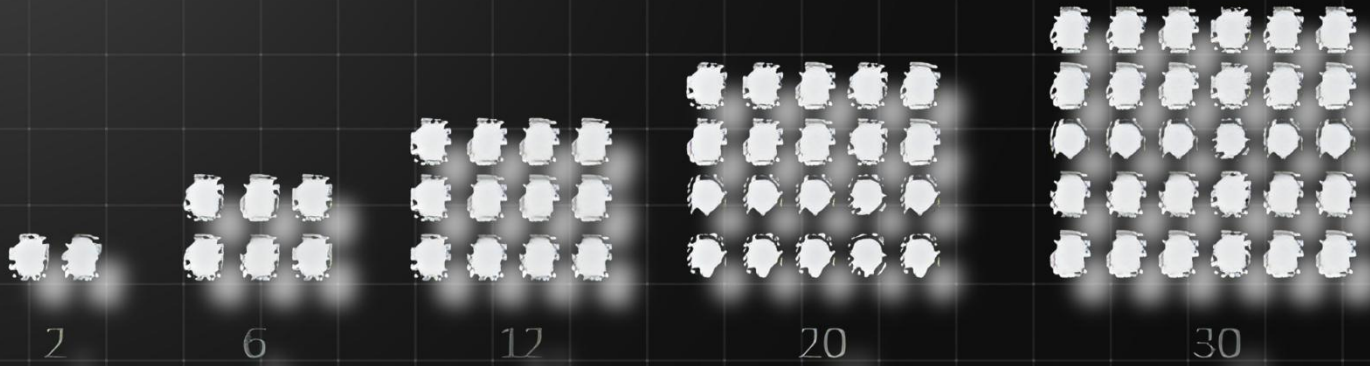
Jakarta, September 2025

Tim Fitri

Daftar Isi

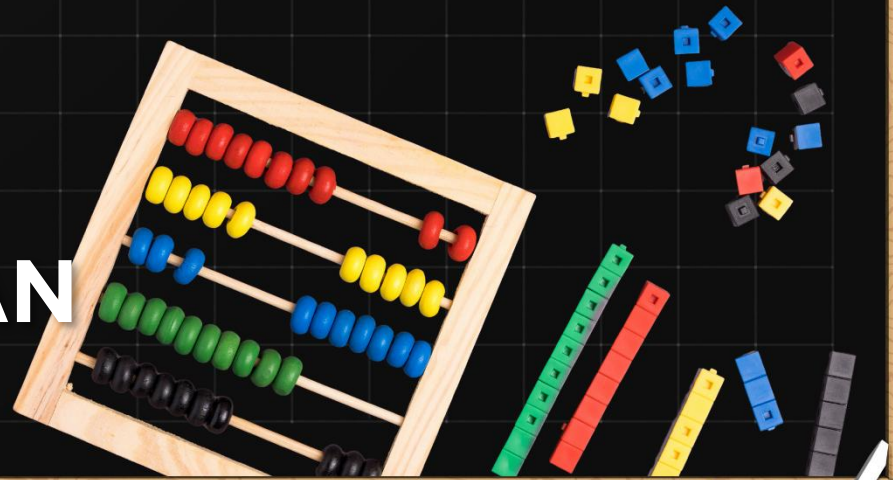
BAB 1: POLA BILANGAN	5
1. Pola Bentuk	7
2. Pola Bilangan	9
3. Menentukan Nilai Suku ke-n	11
4. Pola Bilangan Lainnya	13
5. Menentukan Rumus Suku ke-n (Pengayaan)	15
Rangkuman	17
Latihan Soal	18
Referensi	20
BAB 2: RELASI DAN FUNGSI	21
1. Koordinat Cartesius	23
2. Relasi	26
3. Fungsi	31
4. Fungsi sebagai Mesin	33
5. Kemungkinan Fungsi atau Pemetaan	35
6. Kemungkinan Korespondensi Satu-Satu	37
Rangkuman	40
Latihan Soal	41
Referensi	44
BAB 3: PERSAMAAN GARIS LURUS	45
1. Formula Fungsi	47
2. Persamaan Garis Lurus	50
3. Gradien Garis	53
4. Garis Sejajar dan Tegak Lurus	56
5. Masalah yang Berkaitan dengan Persamaan Garis	59
Rangkuman	60
Latihan Soal	62
Referensi	65
BAB 4: SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL	66
1. Permasalahan Dua Variabel	68
2. Persamaan Linear dengan Dua Variabel	70
3. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel	72

4. Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel	75
5. Masalah yang Berkaitan dengan SPLDV	80
Rangkuman	82
Latihan Soal	83
Referensi	85
BAB 5: KEKONGRUENAN PADA SEGITIGA	86
1. Garis dan Sudut	88
2. Pembuktian Dua Garis Sejajar	92
3. Sudut Dalam dan Sudut Luar Segitiga	95
4. Dua Segitiga yang Kongruen.....	99
Rangkuman	103
Latihan Soal	104
Referensi	107
BAB 6: KEKONGRUENAN PADA SEGI EMPAT	108
1. Kongruensi Segitiga Siku-Siku	110
2. Kongruensi pada Segi Empat.....	114
3. Kongruensi Segi Empat Istimewa	119
Rangkuman	122
Latihan Soal	123
Referensi	126
BAB 7: TEORI PELUANG	127
1. Percobaan dan Ruang Sampel.....	129
2. Peluang	131
3. Frekuensi Harapan	134
4. Menentukan Peluang Berdasarkan Informasi Statistika	136
5. Peluang Gabungan Dua Kejadian	139
Rangkuman	142
Latihan Soal	143
Referensi	145



BAB 1

POLA BILANGAN



Karakter Pelajar Pancasila

Bernalar Kritis: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan bilangan dan pola yang terbentuk.

Tujuan Pembelajaran: Menapaki Pola Bilangan dalam Kehidupan

1. Memahami pengertian pola dan barisan.

- ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep pola bilangan.
- ▷ Menentukan bentuk yang muncul dari suatu pola bentuk.
- ▷ Menentukan pola bentuk.

2. Menggeneralisasi pola bilangan.

- ▷ Menentukan bilangan yang muncul berikutnya dari suatu pola bilangan.
- ▷ Memahami pola bilangan yang disajikan.

Kata Kunci: Barisan, Barisan Fibonacci, Pola, Pola Bentuk, Pola Bilangan, Segitiga Pascal, Suku.

3. Menerapkan rumus suku ke-n dalam pola bilangan.

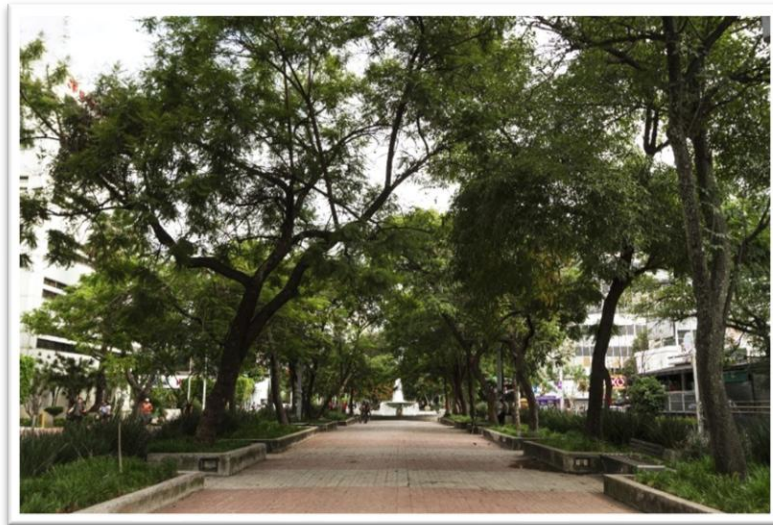
- ▷ Mengidentifikasi nilai suku ke-n jika diketahui barisan bilangan.
- ▷ Menentukan nilai suku ke-n jika diketahui rumus barisan bilangan.
- ▷ Menentukan rumus suku ke-n dari suatu pola bilangan.



F I T R I



1. Pola Bentuk



Pohon yang Terlihat Berpola – Freepik

Banyak bangunan atau gedung yang dibentuk dengan pola tertentu. Sebagai contoh piramida di Mesir. Secara sederhana, pola bentuk menggambarkan hubungan antara satu bentuk dengan bentuk lainnya, baik itu dalam geometri, arsitektur, ataupun seni.

Alam sekitar penuh dengan pola bentuk yang terbentuk secara alami. Fenomena ini dapat dilihat dalam berbagai aspek alam, mulai dari struktur tanaman, hewan, hingga formasi geologi. Perhatikan pertumbuhan dari tanaman berikut.



Pertumbuhan Tanaman – Akupintar.id

Pada pertumbuhan tanaman, terdapat kesamaan yang selalu bertahan pada setiap tahap pertumbuhan.



Pojok Matematika

Rahasia Nomor Telepon Mudah Diingat

- ▷ Nomor telepon sering kali dirancang agar lebih mudah diingat dengan memanfaatkan pola tertentu. Susunan angka yang berulang, seperti 1212 atau 7878, membuat otak lebih cepat mengenali dan menyimpannya dalam memori jangka pendek. Selain itu, adanya urutan naik atau turun, misalnya 1234 atau 9876, juga membantu mempercepat proses mengingat karena mengikuti alur yang sudah familiar dalam kehidupan sehari-hari.
- ▷ Di samping pola sederhana, beberapa nomor telepon juga menggunakan prinsip matematika yang lebih kompleks, seperti kelipatan bilangan atau gabungan antara angka ganjil dan genap. Susunan semacam ini memberikan struktur yang teratur sehingga memori dapat mengaitkannya dengan konsep yang sudah dipahami sebelumnya. Contoh lain yang sering ditemui adalah pengelompokan angka menjadi beberapa bagian kecil, misalnya 3 – 4 digit, yang dikenal sebagai *chunking*. Teknik ini mempermudah otak memproses informasi dalam potongan yang lebih ringkas.
- ▷ Kemudahan mengingat nomor telepon bukan hanya sekadar strategi pemasaran, tetapi juga bagian dari penerapan pola bilangan dalam kehidupan nyata. Dengan memahami susunan angka yang membentuk pola tertentu, proses mengingat menjadi lebih efisien. Hal ini membuktikan bahwa pola bilangan tidak hanya terdapat dalam soal matematika, tetapi juga hadir dalam aspek sehari-hari, termasuk dalam penyusunan nomor telepon.





2. Pola Bilangan



Susunan Kursi Bioskop Membentuk Pola – Freepik

Pola bilangan terbentuk berdasarkan suatu aturan tertentu yang dapat berupa penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, atau operasi matematika lainnya.

Pola bilangan dapat dibagi ke dalam beberapa kategori berdasarkan aturan yang mendasarinya. Terdapat beberapa pola bilangan, di antaranya sebagai berikut:

- 1) Pola bilangan ganjil: 1, 3, 5, Pada pola ini, setiap suku berikutnya selalu ditambah dua, dengan suku pertama adalah 1. Banyak cara untuk menyatakan pola bilangan ini.
- 2) Pola bilangan genap: 2, 4, 6, Pada pola ini, setiap suku berikutnya selalu ditambah dua, dengan suku pertama adalah 2.
- 3) Pola bilangan kuadrat: 1, 4, 9, Setiap suku merupakan kuadrat dari bilangan asli.
- 4) Pola bilangan aritmatika, setiap sukunya diperoleh dengan menambahkan bilangan tetap pada suku sebelumnya. Contoh deret 2, 5, 8, ... , memiliki selisih yang tetap, yaitu 3.
- 5) Pola bilangan fibonacci, setiap suku diperoleh dengan menjumlahkan dua suku sebelumnya. Dimulai dari angka 0 dan 1, deret ini akan berkebang sebagai berikut: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,

Nama lain untuk pola bilangan adalah barisan bilangan. Seperti dalam hal barisan, urutan bilangan sangat perlu diperhatikan. Pada barisan bilangan kuadrat, yaitu 1, 4, 9, 16, ... , bilangan 1 disebut suku pertama, bilangan 4 disebut suku ke-2, dan seterusnya.

Contoh Soal

Tentukan suku ke-20 dari barisan 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1,

Pembahasan:

Dari barisan 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, ... ada dua pola barisan yang terlihat yaitu [1], (1), [1], (2), [1], (3), [1], (4), [1],

Suku-suku barisan bilangan kurung siku [Un] selalu pada suku bernomor ganjil (n ganjil) dan nilainya tetap yaitu 1. Sedangkan suku-suku barisan bilangan kurung biasa (Un) selalu pada suku bernomor genap (n genap) dan polanya mengikuti pola bilangan asli yaitu 1, 2, 3, 4, ...

Suku ke-20 dari barisan di atas adalah suku-10 pada barisan bilangan suku bernomor genap. Sehingga suku ke-20 adalah 10.



Pola pada Barcode

- ▷ Dalam kehidupan modern, pola bilangan banyak digunakan dalam teknologi penyimpanan data, salah satunya melalui sistem barcode dan QR Code. Barcode berbentuk deretan garis vertikal dengan variasi ketebalan serta jarak, sedangkan QR Code berupa susunan kotak hitam-putih dalam pola matriks. Kedua teknologi ini bekerja dengan mengubah angka dan huruf menjadi pola visual tertentu sehingga informasi dapat dipindai kembali oleh mesin secara cepat dan akurat.
- ▷ Pola bilangan memiliki peranan penting dalam memastikan data tersimpan dengan struktur yang teratur. Setiap bagian dari barcode atau QR Code merepresentasikan kombinasi angka biner yang saling berhubungan. Dengan adanya pola teratur ini, mesin pemindai mampu mengenali posisi awal, akhir, serta isi data dengan tingkat keakuratan tinggi. Keteraturan pola juga memungkinkan penyimpanan informasi dalam jumlah besar pada ruang yang relatif kecil, khususnya dalam QR Code yang dapat menampung lebih banyak data dibandingkan barcode tradisional.
- ▷ Penerapan teknologi ini sangat terlihat dalam kehidupan sehari-hari, misalnya saat melakukan pembayaran di kasir, memindai tiket perjalanan, atau mengakses tautan digital melalui QR Code. Semua aktivitas tersebut menjadi lebih praktis karena pola bilangan di balik barcode dan QR Code mampu menyimpan serta mengirimkan informasi dengan efisien. Dengan demikian, pola bilangan terbukti tidak hanya sebagai konsep matematika, tetapi juga sebagai dasar teknologi modern yang mendukung aktivitas manusia secara luas.





3. Menentukan Nilai Suku ke-n

Menentukan Nilai Suku ke-n Jika Diketahui Barisan Bilangan



Permainan Susun Kartu – Freepik

Contoh Soal

Diketahui pola bilangan berikut diperoleh dengan menambah bilangan tertentu. Lengkapi setiap pola bilangan berikut.

Suku ke-	1	2	3	4	5	...	100	1.000
Bilangan	16	20	24			...		

Pembahasan:

Buat titik P seperti pada gambar di mana $BP = CD = 18$ cm dan $BC = PD = 18$ cm.

Untuk mengisi tabel di atas, perhatikan tabel berikut.

Suku ke-	1	2	3	4	5	...	100	1.000
Bilangan	16	20	24			...		
Penambahan		4	4	4	4		4	4

Untuk melengkapi tabel tersebut, dapat dilakukan dengan cara berikut.

Suku ke-	1	2	3	4	5	...	100	1.000
Bilangan	16	$16 + 4$ $= 20$	$20 + 4$ $= 24$	$24 + 4$ $= 28$	$28 + 4$ $= 32$...		
Penambahan		4	4	4	4		4	4

Bilangan di atas dapat ditulis sebagai berikut.

Suku ke-	1	2	3	4	5		100	1.000
Bilangan	16	$16 + 4$ $= 20$	$16 + 4 \times 2$ $= 24$	$16 + 4 \times 3$ $= 28$	$16 + 4 \times 4$ $= 32$...		
Penambahan		4	4	4	4		4	4

Berdasarkan kolom terakhir pada tabel di atas, perhatikan nomor suku bilangan dan bilangan pengali 4. Jadi, nilai bilangan pada suku ke-100 adalah sebagai berikut.

$$16 + 4 \times 99 = 16 + 4 \times (100 - 1)$$

$$= 16 + 400 - 4 = 412$$

Sementara itu, nilai suku ke-1.000 ditentukan dengan cara berikut.

$$16 + 4 \times (1.000 - 1)$$

$$= 16 + 4.000 - 4 = 4.012$$





4. Pola Bilangan Lainnya



Seseorang Mengamati Pola Gedung – Freepik

Hasil dari $(a + b)$ dapat dihitung dengan:

$$(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

dan

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Dapat terlihat bahwa pangkat a akan terus turun, sedangkan pangkat b akan naik. Misalkan pada bentuk:

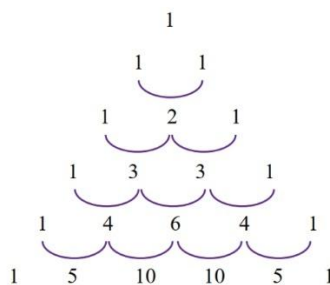
$$(a + b)^4 = a^4 + \dots a^3b + \dots a^2b^2 + \dots ab^3 + b^4$$

dengan koefisien belum diketahui. Tentu dapat dicari melalui perkalian seperti:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) \\ &= \dots + (a^3 \times b + 3a^2b \times a) + \dots \end{aligned}$$

yaitu penjumlahan dari perkalian suku di atasnya.

Koefisien tersebut akan dapat diperoleh dengan menjumlahkan dua bilangan di atasnya, yaitu:



Perhatikan bahwa baris berikutnya diperoleh 2 kali dari baris sebelumnya. Pola bilangan tersebut dinamakan segitiga Pascal.

Menentukan Nilai Suku ke-n Jika Diketahui Rumus Suku ke-n

Pada pembahasan sebelumnya, telah dipelajari pola (barisan) bilangan untuk beberapa suku barisan. Seringkali, ditemukan barisan yang hanya diberikan rumus suku ke-n. Sebagai contoh, barisan dengan suku ke-n adalah $U_n = 3n - 1$. Berdasarkan informasi ini, dapat dihitung bilangan pada barisan itu, yaitu:

$$\text{suku ke-1 adalah } U_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$$

yaitu mengganti n dengan 1. Suku ke-2 diperoleh dengan mengganti n dengan 2, diperoleh

$$U_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$$

dan seterusnya.

Barisan bilangan tersebut adalah 2, 5, 8, 11, ...

yaitu barisan yang setiap suku berikutnya diperoleh dengan cara menambahkan dengan bilangan tetap sebesar 3.



Pojok Matematika

Mengapa Sisi Berlawanan Dadu Selalu Berjumlah 7?

- ▷ Dalam permainan tradisional maupun modern, dadu menjadi alat yang banyak digunakan untuk menghasilkan angka acak. Salah satu ciri khas yang selalu melekat pada dadu adalah jumlah titik pada sisi yang saling berlawanan selalu bernilai tujuh. Contohnya, sisi dengan satu titik berhadapan dengan sisi enam titik, sisi dengan dua titik berlawanan dengan sisi lima titik, serta sisi dengan tiga titik berlawanan dengan sisi empat titik. Pola ini dirancang dengan sengaja agar dadu memiliki keteraturan yang konsisten.
- ▷ Penentuan jumlah tujuh pada sisi berlawanan memiliki tujuan untuk menjaga keseimbangan fisik dan probabilitas dadu. Dengan penempatan tersebut, distribusi massa dadu menjadi lebih simetris sehingga peluang setiap sisi untuk muncul tetap sama saat dadu dilempar. Selain itu, pola angka ini memudahkan penghitungan dan pengecekan, karena siapa pun dapat memastikan keaslian dadu dengan melihat apakah jumlah sisi berlawanan bernilai tujuh.
- ▷ Keteraturan jumlah tujuh pada dadu mencerminkan penerapan konsep pola bilangan dalam kehidupan sehari-hari. Prinsip sederhana ini tidak hanya memberi keadilan dalam permainan, tetapi juga menunjukkan bagaimana matematika digunakan dalam perancangan objek yang tampak sepele. Melalui contoh ini, dapat dipahami bahwa konsep bilangan dan pola memiliki manfaat praktis yang mendukung aktivitas hiburan sekaligus melatih pemahaman matematis.





5. Menentukan Rumus Suku ke-n (Pengayaan)

Perhatikan tabel berikut.

Suku ke-	1	2	3	4	5
Bilangan	1	3	7	13	21

Suku ke-	1	2	3	4	5
Bilangan	1	3 (1 + 2)	7 (1 + 2 + 4)	13 (1 + 2 + 4 + 6)	21 (1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10)
Selisih I	2	4	6	8	10
Selisih II		2	2	2	2

Dapat disimpulkan barisan bilangan atau pola bilangan di atas adalah sebagai berikut.

$$3 = 1 + 2,$$

$$7 = 1 + 2 + 4,$$

$$13 = 1 + 2 + 4 + 6,$$

$$21 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8,$$

berikutnya adalah:

$$S_6 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$= 1 + x$$

dengan $x = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$.

dapat dicari dengan teknik Gauss, yaitu:

$$2x = 5(2 + 10) \text{ atau } x = 30$$

Jadi,

$$S_6 = 1 + 30 = 31$$

sesuai dengan pola.

Berdasarkan teknik ini, dapat dicari tahu nilai suku ke-n dari pola bilangan 1, 3, 7, 13, 21,

Suku ke-n pola bilangan ini adalah

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2n - 2)$$

Oleh karena terdapat $n - 1$ bilangan (2, 4, 6, ...), maka

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2n - 2)$$

$$= 1 + x$$

dengan

$x = 2 + 4 + 6 + \dots + (2n - 2)$ ada sebanyak $(n - 1)$ bilangan. Berdasarkan teknik Gauss, maka:

$$2x = (n - 1)[2 + (2n - 2)]$$

$$= (n - 1)2n$$

Jadi,

$$\begin{aligned}x &= n(n - 1) \\ &= n^2 - n\end{aligned}$$

dan

$$S_n = n^2 - n + 1$$

Pembuktian untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$S_3 = 9 - 3 + 1 = 7$$

$$S_4 = 16 - 4 + 1 = 13$$

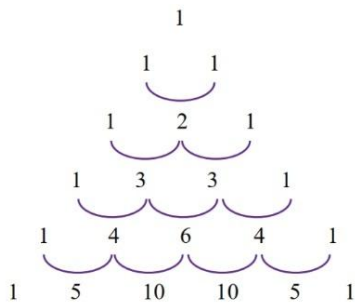


Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan pola bilangan diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang pola bentuk, rumus suku ke- n , dan penerapannya. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

- 1) Pola adalah susunan berulang dari bentuk atau bilangan.
- 2) Beberapa contoh pola bilangan:
 - ▷ pola bilangan ganjil: 1, 3, 5, 7, ...
 - ▷ pola bilangan genap: 2, 4, 6, 8, ...
 - ▷ pola bilangan kuadrat: 1, 4, 9, 16, ...

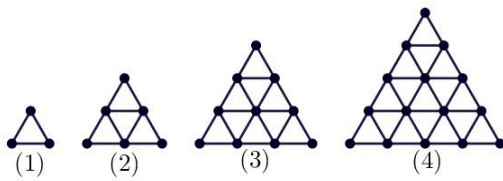
- 3) Segitiga Pascal



- 4) Barisan Fibonacci diperoleh dengan cara menjumlahkan dua suku di depannya, yaitu 1, 1, 2, 3, 5, ...

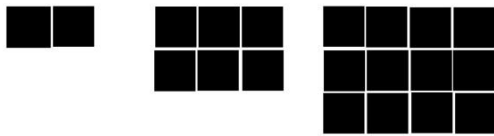
Latihan Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



Gambar berikut adalah segitiga yang disusun dari batang korek api. Banyak batang korek api yang dibutuhkan untuk membuat pola ke-6 adalah ...

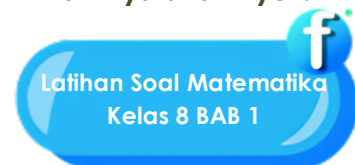
- a. 48
b. 63
c. 54
d. 72
2. Dua suku berikutnya dari barisan 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... adalah ...
- a. 22, 33
b. 20, 28
c. 21, 34
d. 17, 25
3. Pada pola bilangan ganjil: 1, 3, 5, 7, 9, dst. Maka bilangan ganjil ke 25 adalah ...
- a. 29
b. 25
c. 45
d. 49
4. Banyak persegi pada pola ke-20 adalah ...



- a. 420
b. 480
c. 240
d. 300
5. Tiga bilangan selanjutnya dari pola barisan bilangan 10, 30, 50, 70, ..., ..., ... adalah ...
- a. 80, 90, 100
b. 100, 200, 400
c. 90, 110, 130
d. 110, 130, 150
6. Jika a, b, 7, 12, 19 merupakan barisan Fibonacci, maka nilai a adalah ...
- a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
7. Diketahui rumus suku ke-n sebuah barisan adalah $U_n = 2n^2 - 5$. Hasil penjumlahan suku ke-4 dan ke-5 adalah ...
- a. 154
b. 82
c. 72
d. 26

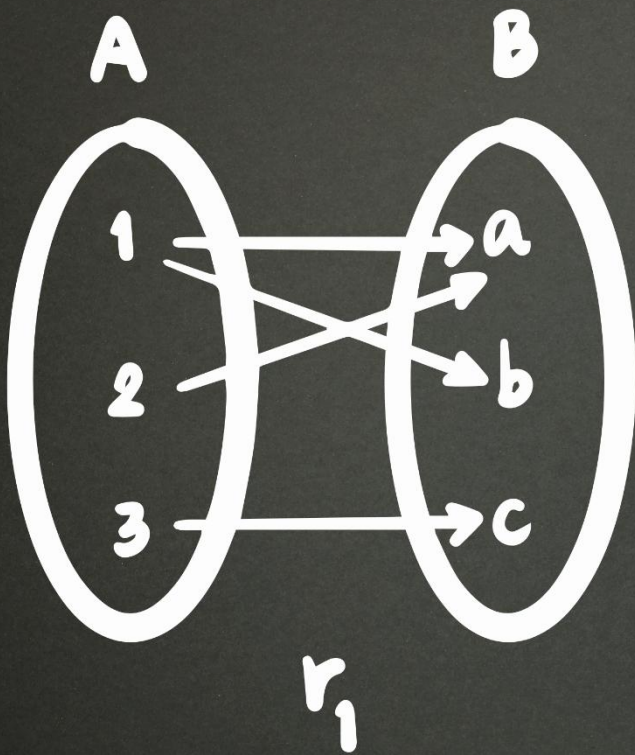
8. Satu pasukan parade drum band yang berjumlah 4949 orang membentuk formasi barisan. Paling depan 11 orang, kemudian dibelakangnya bertambah 22, dan berikutnya bertambah 22 lagi dan seterusnya. Maka banyaknya orang pada barisan terakhir adalah ...
- a. 11
b. 13
c. 15
d. 17
9. Dari suatu barisan aritmatika diketahui $U_3 = 5$, $U_7 = 13$, dan $b = 2$. Rumus suku ke- n barisan bilangan tersebut adalah ...
- a. $U_n = 2n + 1$
b. $U_n = 2n - 1$
c. $U_n = 3n - 1$
d. $U_n = n^2 - 1$
10. Jumlah bilangan di antara 1 dan 100 yang habis dibagi 7 adalah ...
- a. 98
b. 735
c. 840
d. 1.470

**Akses latihan soal
lainnya di sini yuk!**



Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Syarief, N. H., Fatmawati, A., & Ralmugiz, U. 2023. Bayangan konsep siswa pada materi pola bilangan ditinjau dari kemampuan matematika. *Jurnal Penelitian Pembelajaran Matematika Sekolah (JP2MS)*, 7(1), 1-12.
- Khasanah, F. N. 2018. Pengujian fungsional dan non-fungsional aplikasi nomor darurat. *e-Journal Bina Insani*, 6(2), 105-112.
- Fuada, S. 2009. *Analisis matematika pada barcode satu dimensi (Thesis)*. UIN Malang.
- Nuraini, A. 2022. Jaring-jaring kubus dengan aturan jumlah titik sisi berlawanan. *KADIKMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(4), 201-210.
- Chan, S. W. 2021. Learning number patterns through computational thinking activities. *Heliyon*, 7(6), e07371.
- McCabe, M., & Tedesco, S. 2012. Using QR codes and mobile devices to foster an inclusive learning environment for mathematics education. *International Journal of Teaching, Education and Learning*, 1(1), 1-10.



BAB 2

RELASI DAN FUNGSI

Karakter Pelajar Pancasila

Bernalar Kritis: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan relasi dan fungsi.

Kreatif: Mampu mencari solusi permasalahan yang berkaitan dengan relasi dan fungsi.

Kata Kunci: Diagram Cartesius, Diagram Panah, Domain, Fungsi, Fungsi Linear, Grafik Fungsi, Himpunan, Kodomain, Pasangan Terurut, Relasi, Rumus Fungsi.

Tujuan Pembelajaran: Menjelajahi Relasi dan Fungsi Matematika

1. Memahami pengertian relasi dan fungsi.

- ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep relasi dan fungsi.
- ▷ Menentukan relasi dan fungsi yang disajikan.

2. Menjelaskan relasi dan fungsi antarhimpunan.

- ▷ Menyajikan relasi antarhimpunan menggunakan diagram Cartesius, diagram panah, dan pasangan terurut.
- ▷ Menyajikan fungsi antarhimpunan menggunakan diagram Cartesius, diagram panah, dan pasangan terurut.

3. Memahami istilah-istilah dan hubungan dalam relasi dan fungsi.

- ▷ Menjelaskan istilah dalam relasi dan fungsi, seperti domain, kodomain, dan perkalian Cartesius.
- ▷ Menentukan hubungan relasi antarhimpunan yang disajikan dalam bentuk diagram Cartesius, diagram panah, dan pasangan terurut.

4. Menentukan bentuk fungsi linear.

- ▷ Mengidentifikasi bentuk fungsi linear berupa rumus fungsi.
- ▷ Menentukan bentuk fungsi linear berupa grafik fungsi pada diagram Cartesius.

5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi.

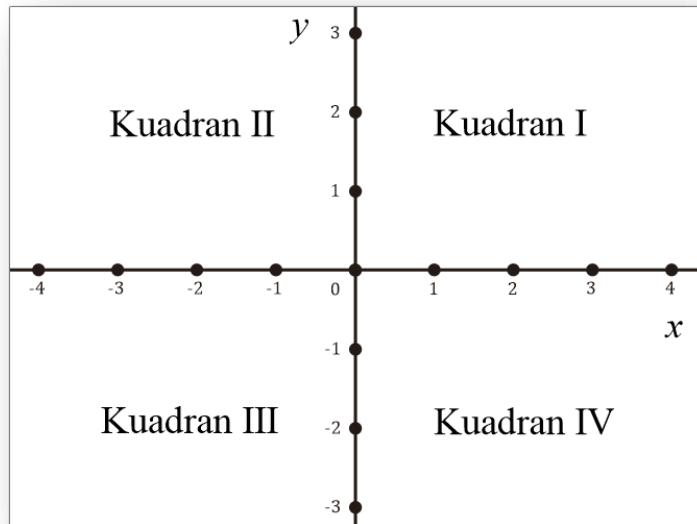
- ▷ Menentukan solusi atas permasalahan yang berkaitan dengan fungsi dalam kehidupan sehari-hari.
- ▷ Menyelesaikan masalah matematika yang berkaitan dengan fungsi.



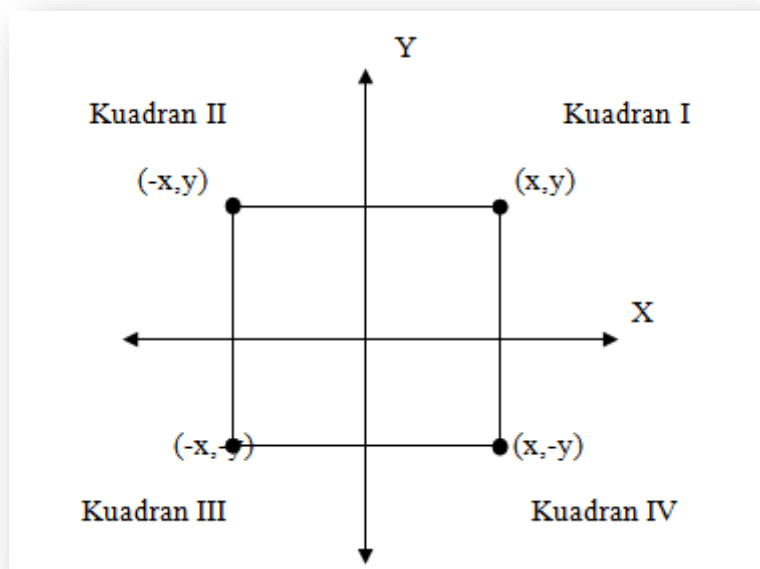
1. Koordinat Cartesius

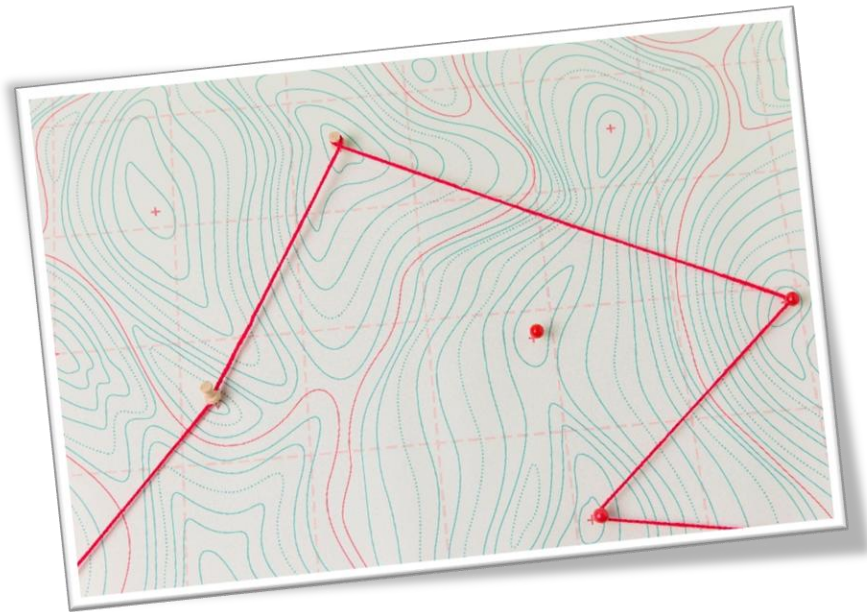
Dalam matematika, sistem koordinat Cartesius digunakan untuk menunjukkan posisi suatu titik pada bidang datar, yaitu dua garis berskala yang berpotongan tegak lurus. Garis berskala horizontal dinamakan sumbu X, sedangkan yang vertikal dinamakan sumbu Y. Kedua sumbu ini berpotongan di titik nol, yang disebut titik origin atau titik pusat, biasanya ditulis $(0, 0)$.

Koordinat Cartesius terbagi menjadi 4 daerah yang dinamakan kuadran I, II, III, dan IV.



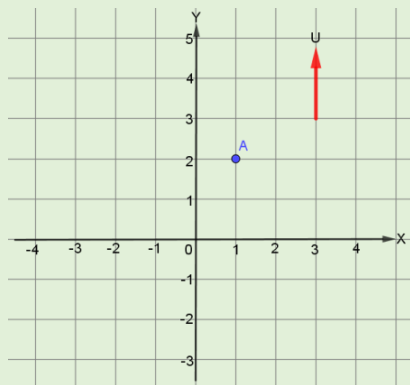
Posisi titik (x, y) ditentukan dengan cara berikut, yaitu bergerak ke kanan atau ke kiri sejauh bilangan positif x atau $-x$, kemudian ke atas atau ke bawah sejauh bilangan positif y atau $-y$. Pasangan bilangan (x, y) disebut koordinat titik. Koordinat pertama adalah x dan koordinat kedua adalah y .





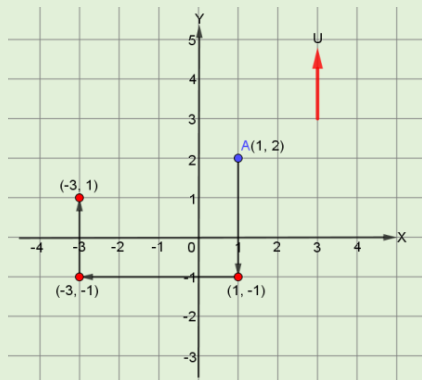
Titik Koordinat – Freepik

Contoh Soal



Sebuah pesawat semula berada di titik A. Pesawat itu bergerak 3 satuan ke selatan, lalu belok ke arah barat sejauh 4 satuan, dan belok ke arah utara sejauh 2 satuan. Tentukan koordinat pesawat saat ini.

Pembahasan:



Dari titik A(1,2), bergerak 3 satuan ke selatan menuju titik (1,-1), kemudian belok ke arah barat sejauh 4 satuan menjadi (-3,-1). Terakhir belok ke arah utara sejauh 2 satuan menjadi (-3,1). Jadi, koordinat pesawat tersebut saat ini adalah (-3, 1)



Pojok Matematika

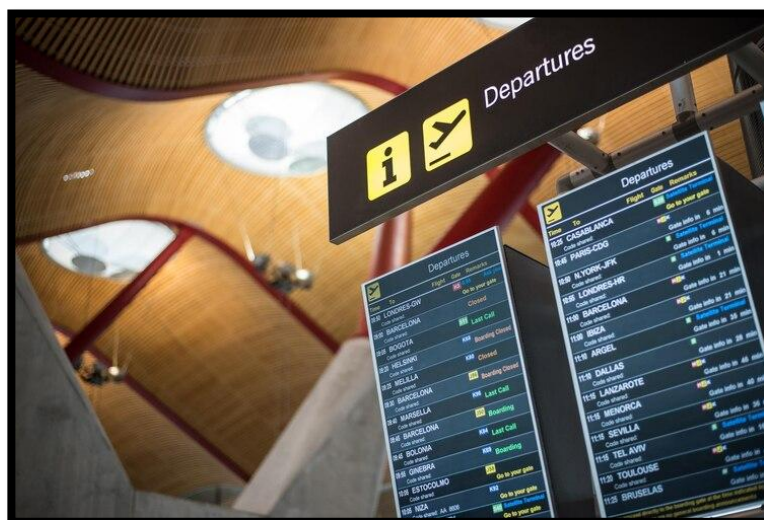
Titik Koordinat pada Map Digital

- ▷ Peta digital merupakan salah satu contoh nyata penerapan koordinat Kartesius dalam kehidupan sehari-hari. Melalui sistem ini, setiap lokasi pada permukaan bumi direpresentasikan oleh pasangan bilangan yang menunjukkan garis lintang dan garis bujur. Prinsip koordinat tersebut serupa dengan koordinat Kartesius pada bidang datar, di mana setiap titik memiliki nilai unik yang menunjukkan letak horizontal dan vertikal terhadap titik acuan tertentu. Dengan demikian, keberadaan suatu lokasi dapat ditentukan secara pasti dan tidak tertukar dengan lokasi lain.
- ▷ Penggunaan titik koordinat pada peta digital memudahkan dalam berbagai aktivitas, mulai dari mencari alamat rumah, menentukan rute perjalanan, hingga menemukan posisi fasilitas umum. Keakuratan koordinat memungkinkan aplikasi navigasi memberikan petunjuk arah yang presisi, sehingga perjalanan menjadi lebih efisien. Selain itu, koordinat juga mempermudah pengiriman barang, layanan transportasi daring, maupun pemetaan wilayah untuk tujuan penelitian. Melalui pemanfaatan koordinat, keterhubungan antara ruang fisik dan ruang digital dapat tercipta secara harmonis.
- ▷ Penerapan koordinat pada peta digital tidak hanya bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari, tetapi juga mendukung pengelolaan wilayah secara luas. Perencanaan tata kota, pembangunan infrastruktur, hingga penanggulangan bencana memerlukan data koordinat untuk memastikan ketepatan lokasi. Keberadaan titik koordinat memberikan dasar yang kuat bagi berbagai sektor untuk mengoptimalkan perencanaan dan pengambilan keputusan. Hal ini memperlihatkan bahwa konsep koordinat Cartesius memiliki peran penting sebagai fondasi dalam sistem informasi geografis modern.





2. Relasi



Setiap Keberangkatan (Domain) Memiliki Tujuan (Kodomain) – Freepik.com

Pola bagian ini akan dibahas mengenai relasi antara dua anggota dua himpunan. Relasi dapat disebut juga hubungan atau kaitan.

Pengertian Relasi

Relasi menghubungkan setiap anggota dari himpunan pertama (biasanya disebut himpunan A) ke anggota-anggota himpunan kedua (biasanya disebut himpunan B), sesuai aturan tertentu. Relasi merupakan suatu hubungan antara anggota-anggota dua himpunan.

Dalam matematika, relasi dapat dinyatakan dalam tiga bentuk:

- 1) diagram panah atau gambar panah,
- 2) diagram cartesius,
- 3) pasangan terurut.

Diagram Panah

Misalnya, terdapat 4 orang anak yaitu Ali, Siti, Amir dan Rizki. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka. Ali menyukai warna merah, Siti menyukai warna ungu, Amir menyukai warna hitam, dan Rizki menyukai warna merah. Dari hasil uraian tersebut, terdapat dua buah himpunan.

Himpunan pertama adalah himpunan anak, kita sebut himpunan A dan himpunan yang kedua adalah himpunan warna, kita sebut himpunan B. Hubungan antara himpunan A dan himpunan B dapat di ilustrasikan dengan diagram panah seperti berikut:

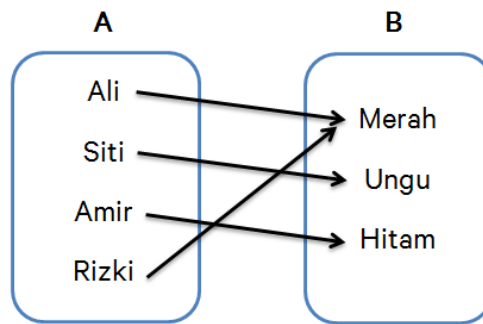


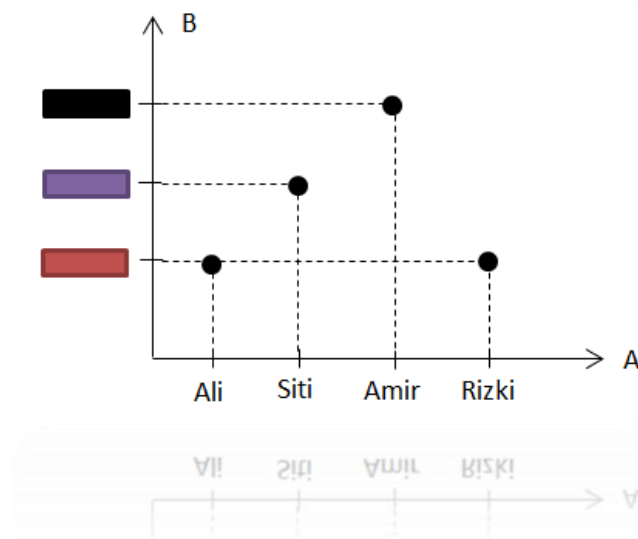
Diagram panah tersebut merupakan relasi antara anak dengan warna yang mereka sukai. Relasi antara kedua himpunan tersebut dapat dinyatakan dengan panah-panah yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.

Himpunan anak (himpunan A) disebut daerah asal atau domain, sedangkan himpunan warna (himpunan B) disebut daerah kawan atau kodomain. Posisi dari himpunan ini sangat penting.

Diagram Cartesius

Untuk menggambar relasi pada diagram Cartesius, gambar dua garis berpotongan terlebih dahulu, yaitu garis mendatar dan garis tegak. Kemudian, anggota dari himpunan domain digambar pada garis mendatar dan anggota dari himpunan kodomain digambar pada garis tegak.

Setiap anggota himpunan pada sumbu mendatar ditarik garis putus-putus ke atas dan pada setiap anggota himpunan pada sumbu tegak ditarik garis putus-putus mendatar. Contoh penyajian relasi dengan diagram Cartesius adalah sebagai berikut.



Pasangan Terurut

Suatu relasi juga dapat dinyatakan dengan menggunakan himpunan pasangan berurutan. Caranya dengan memasangkan himpunan A dengan himpunan B secara berurutan. Dengan menggunakan contoh yang sama, dapat dituliskan,

- ▷ Ali menyukai warna merah.
- ▷ Siti menyukai warna ungu.
- ▷ Amir menyukai warna hitam.
- ▷ Rizki menyukai warna merah.

Dari uraian di atas, relasi dapat dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan seperti berikut:

(Ali, merah), (Siti, ungu), (Amir, hitam), (Rizki, merah)

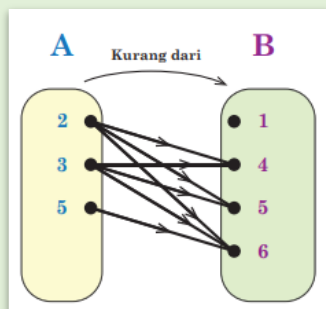
Jadi, relasi antara himpunan A dengan himpunan B dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$.

Contoh Soal

Apabila diketahui suatu himpunan $A = \{2, 3, 5\}$; himpunan $B = \{1, 4, 5, 6\}$; dan relasi dari A ke B adalah "kurang dari". Tuliskan 3 cara relasi dari A ke B.

Pembahasan:

a. Diagram panah

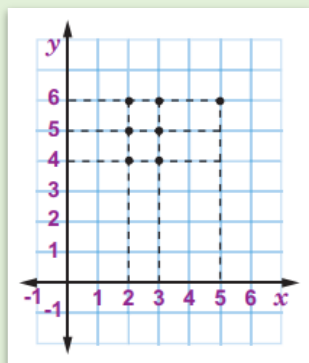


Domain = $\{2, 3, 5\}$

Kodomain = $\{1, 4, 5, 6\}$

Range = $\{4, 5, 6\}$

b. Koordinat Cartesius



c. Himpunan pasangan terurut

Pasangan terurut dari relasi tersebut adalah:

$\{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6)\}$

Definisi Matematika untuk Relasi

a. Pasangan Terurut

Elemen x dan y yang berasal dari dua himpunan, baik himpunan yang sama maupun berbeda, dapat dituliskan

(x, y)

dinamakan pasangan terurut x dan y . Sesuai dengan namanya, (x, y) berbeda dengan (y, x) jika $x \neq y$.

b. Perkalian Cartesius

Perkalian Cartesius dua himpunan merupakan himpunan semesta dari relasi antara kedua himpunan.

Diketahui himpunan A dan B merupakan himpunan tak kosong. Perkalian cartesius A dan B , ditulis $A \times B$, adalah himpunan:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

yaitu himpunan semua pasangan terurut dengan $x \in A$ dan $y \in B$.

Contoh Soal

Diketahui $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Tuliskan himpunan $A \times B$ dan $B \times A$ dengan cara mendaftar anggotanya.

Pembahasan:

Perhatikan tabel berikut.

	1	2	3
a	(a, 1)	(a, 2)	(a, 3)
b	(b, 1)	(b, 2)	(b, 3)

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Bahwa $A \times B$ umumnya tidak sama dengan $B \times A$. Pada kasus ini, terlihat bahwa $n(A) = 2$, $n(B) = 3$, $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$ atau $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$. Maka dari itu, $A \times B$ dinamakan sebagai perkalian Cartesius.

Relasi dari A ke B

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari perkalian Cartesius $A \times B$. Apabila R menyatakan relasi dari A ke B , maka:

$$R \subset A \times B$$

dengan A disebut daerah asal atau domain dan B disebut daerah kawan atau kodomain.

Contoh Soal

Diketahui $A = \{3, 4, 5\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Tuliskan dengan cara mendaftar anggota relasi dari A ke B yang menyatakan kurang dari.

Pembahasan:

- $(3, 4)$ dengan $3 \in A$ dan $4 \in B$ merupakan anggota relasi karena $3 < 4$. Demikian pula $(3, 5)$ menjadi anggota relasi.
- $(4, 5)$ dengan $4 \in A$ dan $5 \in B$, juga termasuk anggota relasi karena $4 < 5$.
- Unsur $5 \in A$ tidak memiliki pasangan karena tidak ada anggota di B dengan $5 \in A$ kurang dari. Jadi, relasi dari A ke B yang menyatakan kurang dari adalah $\{(3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$.



Pojok Matematika

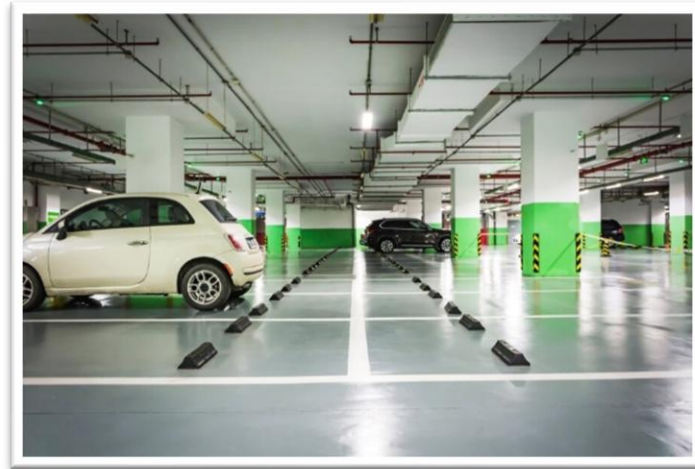
Setiap Orang Punya Nomor Sendiri

- ▷ Nomor Induk Kependudukan (NIK) pada Kartu Tanda Penduduk merupakan salah satu contoh nyata penerapan konsep relasi satu ke satu dalam kehidupan sehari-hari. Setiap individu memiliki NIK yang berbeda dan unik sehingga tidak mungkin ada dua orang dengan nomor yang sama. Hal ini menunjukkan bagaimana suatu himpunan (individu) dipasangkan secara eksklusif dengan anggota himpunan lain (NIK).
- ▷ Keunikan ini memastikan bahwa identitas penduduk dapat dihubungkan dengan tepat ke berbagai data administratif, seperti catatan kependudukan, layanan kesehatan, maupun layanan perbankan. Relasi satu ke satu yang terwujud dalam bentuk NIK memberikan jaminan bahwa data yang tersimpan tidak tertukar dan dapat ditelusuri dengan mudah ketika diperlukan. Konsep tersebut menjadi bukti bahwa penerapan relasi dan fungsi tidak hanya terbatas pada ranah matematika, melainkan juga mendasari sistem administrasi modern.
- ▷ Melalui contoh ini dapat dipahami bahwa fungsi memiliki peran penting dalam menjaga keteraturan dan kejelasan hubungan antar data. Hubungan eksklusif antara individu dan NIK memudahkan pemerintah dalam mengelola informasi serta mencegah terjadinya kesalahan identifikasi. Dengan demikian, konsep relasi satu ke satu menjadi bagian fundamental dari pengelolaan data yang efisien dan akurat dalam kehidupan sehari-hari.





3. Fungsi

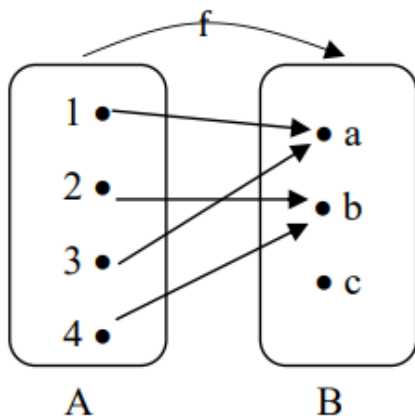


Parkir Mobil Vertikal Menerapkan Konsep Fungsi – Freepik

Suatu fungsi dari A ke B dinamakan **fungsi** atau **pemetaan** dari A ke B apabila **setiap** anggota di A (domain) memiliki pasangan tepat satu dengan anggota di B (kodomain). Khusus untuk fungsi, himpunan A juga disebut sebagai **daerah definisi**.

Syarat suatu relasi merupakan fungsi yaitu:

- ▷ setiap anggota domain memiliki pasangan,
- ▷ pasangan dari anggota domain hanya satu.



Suatu fungsi dapat ditulis dengan huruf kecil f, g, ..., atau huruf kapital F, G, Misalkan fungsi pada gambar di samping diberi nama f. Fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai

$$f : A \rightarrow B$$

$$1 \rightarrow a$$

$$2 \rightarrow b$$

$$3 \rightarrow a$$

$$4 \rightarrow b$$

atau $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, dan $f(4) = b$. Apabila $f(1) = a$, dapat dikatakan bahwa 1 dipetakan ke 1 atau prapeta dari a, tergantung dari pokok kalimat 1 atau a. Selain itu, dapat dikatakan bahwa a merupakan nilai peta untuk 1 oleh f.

Himpunan A disebut domain atas daerah definisi dan B disebut kodomain, sedangkan himpunan

$$\{y \in B \mid y = f(x), x \in A\} = \{a, b\}$$

dinamakan daerah hasil.

Contoh Soal

Diketahui himpunan $R = \{3, 6, 9, 12\}$ dan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. "Anggota R adalah tiga kali anggota S" merupakan relasi yang telah ditentukan. Apakah relasi himpunan R dan S merupakan fungsi?

Pembahasan:

Diketahui bahwa relasi dari himpunan R ke himpunan S diketahui merupakan anggota himpunan R tiga kali anggota himpunan S. Kemudian dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut seperti berikut ini: $\{(3, 1); (6, 2); (9, 3); (12, 4)\}$.

Oleh karena itu, relasi ini merupakan fungsi dari himpunan R ke himpunan S, karena setiap anggota himpunan R memiliki pasangan di himpunan S.



Pojok Matematika

Konsep Fungsi pada Vending Machine

- ▷ Setiap mesin penjual otomatis bekerja berdasarkan prinsip hubungan yang teratur antara input dan output, sehingga konsep fungsi dapat terlihat jelas dalam mekanismenya. Setiap jenis produk yang tersedia di dalam mesin dihubungkan dengan sebuah kode tertentu, seperti kombinasi huruf dan angka. Ketika kode dimasukkan, mesin secara otomatis mengidentifikasi produk yang sesuai dengan input tersebut. Proses ini menggambarkan fungsi, yaitu hubungan yang memasangkan setiap elemen pada himpunan input dengan tepat satu elemen pada himpunan output. Dengan demikian, setiap kode yang diberikan akan selalu menghasilkan produk yang sama tanpa adanya keraguan atau perbedaan hasil.
- ▷ Penerapan fungsi pada mesin penjual otomatis memberikan efisiensi tinggi dalam distribusi barang. Tidak diperlukan interaksi langsung dengan penjual, karena mesin telah diprogram untuk menjalankan aturan fungsi dengan konsisten. Input berupa kode atau nominal uang akan diproses oleh sistem, kemudian mesin mengeluarkan produk sesuai relasi yang telah ditetapkan. Mekanisme ini menjamin keteraturan serta menghindarkan terjadinya kesalahan dalam pemilihan barang. Keandalan tersebut menunjukkan bagaimana konsep matematika dapat diterapkan untuk mendukung teknologi otomatisasi.
- ▷ Sistem fungsi pada mesin penjual otomatis juga memiliki implikasi luas dalam perkembangan teknologi modern. Prinsip yang sama digunakan pada berbagai perangkat otomatis, seperti mesin tiket transportasi, mesin parkir, hingga aplikasi digital berbasis pilihan menu. Keberadaan fungsi dalam konteks ini memberikan dasar logika yang sederhana tetapi sangat efektif dalam menghubungkan input dengan output. Hal ini membuktikan bahwa fungsi tidak hanya dipelajari sebagai konsep teoretis di ruang kelas, melainkan juga sebagai prinsip yang menggerakkan inovasi dalam berbagai bidang kehidupan.





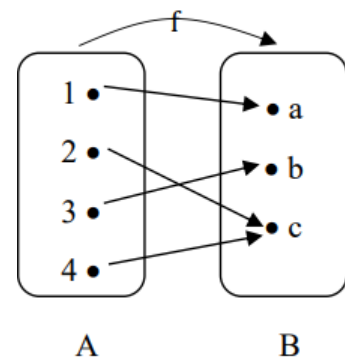
4. Fungsi sebagai Mesin



Kalkulator sebagai Mesin Fungsi – Freepik

Salah satu cara yang mudah untuk memahami konsep fungsi adalah dengan membayangkannya sebagai mesin yang memiliki sifat khusus. Dalam hal fungsi yang berkaitan dengan bilangan, fungsi adalah mesin yang dapat menerima semua bilangan yang berada di domainnya. Setiap kali menerima satu bilangan di domain, mesin hanya memberikan satu bilangan sebagai hasil. Apabila nama fungsi adalah f dan menerima bilangan x , maka hasilnya adalah bilangan $f(x)$.

Dalam analogi fungsi sebagai mesin, himpunan A berperan sebagai input. Mesin fungsi merupakan aturan atau operasi matematika tertentu. Elemen dari himpunan B disebut sebagai hasil keluaran (output).



Contoh Soal

Suatu fungsi $f(x) = 4x - 1$, $f(a) = -9$, dan $f(2) = b$. Tentukan nilai $a - b$.

Pembahasan:

Diketahui $f(x) = 4x - 1$.

Substitusikan $x = a$ sehingga diperoleh

$$f(a) = 4a - 1$$

$$-9 = 4a - 1$$

$$-8 = 4a$$

$$a = -2$$

Substitusikan $x = 2$ sehingga diperoleh

$$f(2) = 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$$

Artinya, nilai b adalah 7.

Jadi, hasil dari $a - b = -2 - 7 = -9$



Pojok Matematika

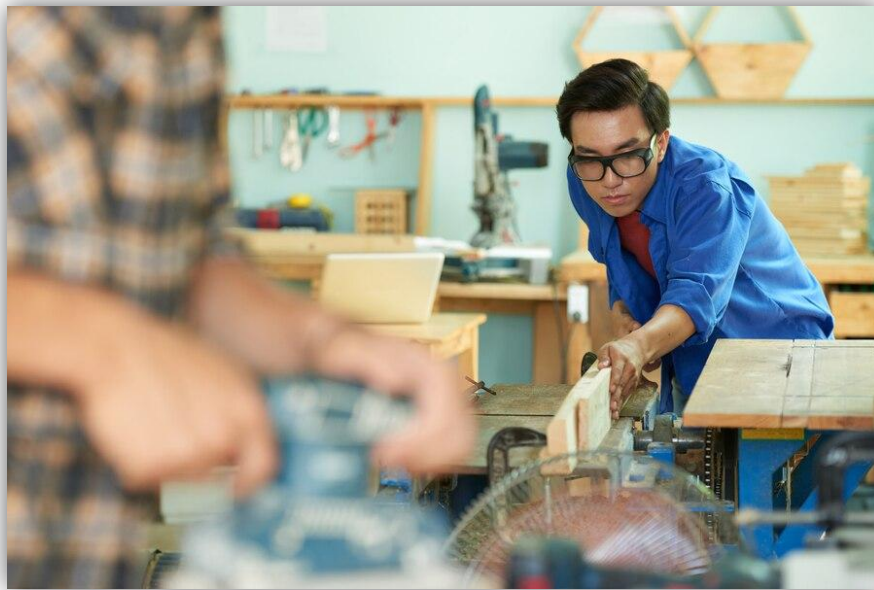
Jam Keberangkatan dan Tujuan dalam Jadwal Kereta

- ▷ Jadwal kereta api disusun berdasarkan keterkaitan antara jam keberangkatan dengan tujuan perjalanan. Setiap jam yang tercatat pada jadwal dihubungkan secara pasti dengan satu relasi tujuan tertentu, sehingga penumpang dapat mengetahui kereta mana yang harus dinaiki untuk mencapai lokasi yang diinginkan. Hubungan ini menggambarkan prinsip fungsi, di mana setiap elemen dari himpunan jam keberangkatan memiliki pasangan unik pada himpunan tujuan perjalanan. Tanpa adanya sistem relasi yang jelas, penumpang akan kesulitan membedakan keberangkatan kereta yang sesuai dengan rute.
- ▷ Keberadaan jadwal yang tersusun rapi tidak hanya memberikan kemudahan bagi pengguna jasa transportasi, tetapi juga memastikan keteraturan operasional kereta api. Setiap relasi antara jam keberangkatan dan tujuan berperan penting dalam menjaga efisiensi waktu, menghindari benturan jadwal, serta meminimalisasi risiko keterlambatan. Dengan sistem ini, perjalanan massal dapat diatur sedemikian rupa sehingga mampu melayani kebutuhan mobilitas masyarakat dalam jumlah besar. Konsep fungsi pada jadwal kereta memberikan ilustrasi nyata bagaimana keteraturan matematika diterapkan dalam sistem transportasi modern.
- ▷ Selain bermanfaat bagi penumpang, jadwal kereta juga berfungsi sebagai pedoman bagi penyelenggara transportasi dalam pengelolaan armada. Penentuan relasi yang konsisten antara waktu keberangkatan dengan tujuan perjalanan mendukung perencanaan rute, penempatan sumber daya, serta distribusi kapasitas penumpang. Penerapan prinsip fungsi dalam konteks ini tidak hanya menciptakan ketepatan waktu, tetapi juga meningkatkan kualitas pelayanan. Dengan demikian, jadwal kereta menjadi contoh konkret penerapan relasi dan fungsi yang berperan langsung dalam kehidupan sehari-hari serta memberikan dampak positif terhadap keberlangsungan sistem transportasi.





5. Kemungkinan Fungsi atau Pemetaan



Ilustrasi Fungsi dalam Rantai Produksi Barang – Freepik

Diketahui himpunan $A = \{a\}$ dan $B = \{1\}$. Kemungkinan pemetaan atau fungsi dari A ke B hanya ada satu karena satu-satunya pasangan $a \in A$ adalah $1 \in B$.

Diketahui himpunan $A = \{a\}$ dan $B = \{1, 2\}$. Banyak semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari A ke B ada dua, yaitu a ke 1 dan kemungkinan lain adalah a ke 2.

Diketahui himpunan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2\}$. Banyak semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari A ke B ada empat. Kemungkinan pasangan a ada dua, yaitu salah satu dari 1 atau 2. Demikian pula pasangan b ada dua, yaitu salah satu dari 1 atau dua. Oleh karena ada dua kemungkinan dan b ada dua kemungkinan, maka semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari A ke B adalah $2 \times 2 = 4$.

Untuk menghitung jumlah fungsi yang mungkin, dapat menggunakan rumus:

$$n(B)^{n(A)}$$

dengan $n(A)$ adalah banyak elemen di himpunan A (domain) dan $n(B)$ adalah banyak elemen di himpunan B (kodomain)

Setiap elemen A harus dipetakan ke satu elemen B , dan B bisa memiliki elemen yang berulang sebagai tujuan, maka tiap elemen A punya n kemungkinan pasangan.

Contoh Soal

1. Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan banyak semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari A ke B.

Pembahasan:

Diketahui:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Diperoleh $n(A) = 3$ dan $n(B) = 5$ sehingga banyak pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah $n(B)^{n(A)} = 5^3 = 125$.

Jadi, banyak semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari A ke B ada 125.

2. Diketahui $A = \{\text{faktor dari } 6\}$ dan $B = \{\text{kelipatan } 2 \text{ yang kurang dari } 8\}$. Tentukan banyak semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari B ke A.

Pembahasan:

Tuliskan seluruh anggota himpunan A dan B terlebih dahulu.

$$A = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

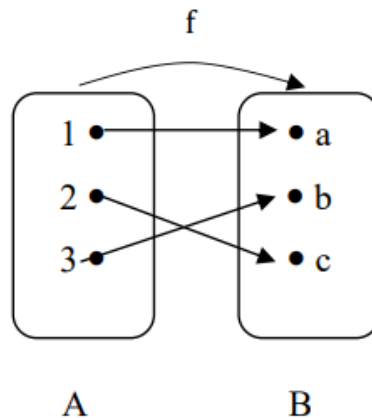
Diperoleh $n(A) = 4$ dan $n(B) = 3$ sehingga banyak pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah $n(A)^{n(B)} = 4^3 = 64$.

Jadi, banyak semua kemungkinan pemetaan atau fungsi dari B ke A ada 64.





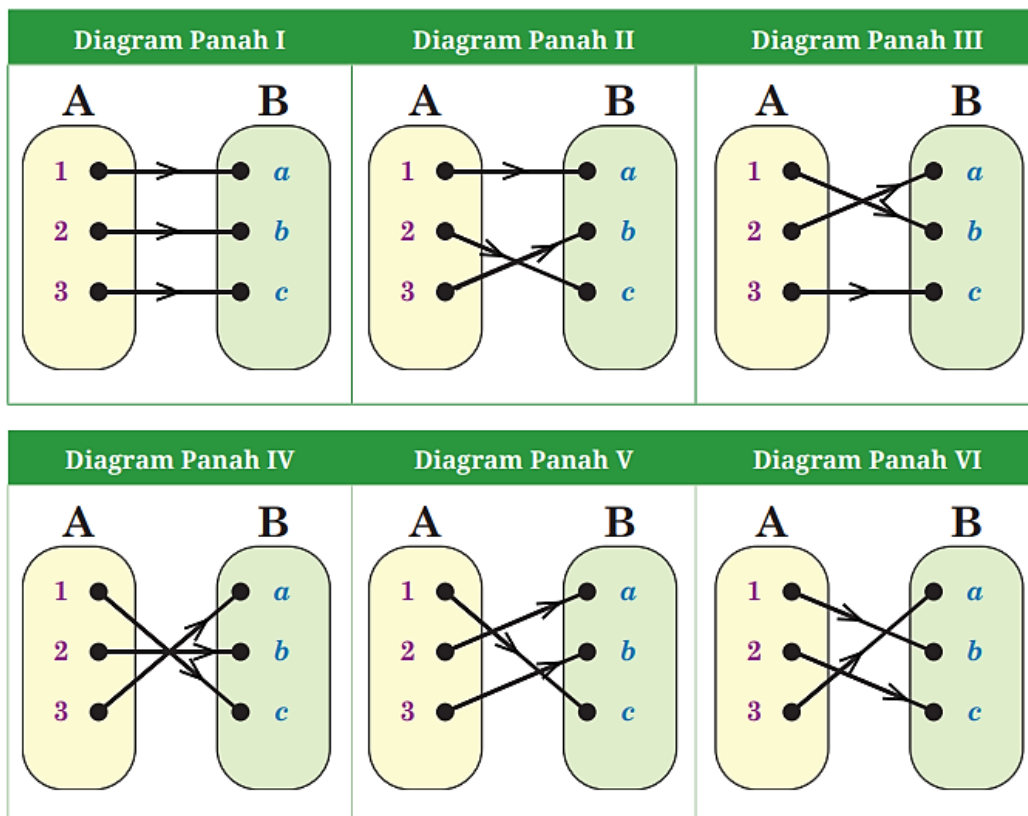
6. Kemungkinan Korespondensi Satu-Satu



Fungsi atau pemetaan di atas disebut korespondensi satu-satu, karena fungsi atau pemetaan seperti ini membawa kesimpulan bahwa setiap anggota A berpasangan dengan tepat satu anggota B dan juga sebaliknya. Jadi, himpunan A dan B memiliki jumlah anggota sama banyak.

A dan B korespondensi satu-satu jika relasi invers dari B ke A juga merupakan fungsi.

Apabila diketahui anggota himpunan A adalah $\{1, 2, 3\}$ dan anggota himpunan B adalah $\{a, b, c\}$. Relasi dari himpunan A ke B yang mungkin dapat dibentuk sebagai korespondensi satu-satu dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Berdasarkan diagram panah di atas, menunjukkan bahwa ada sebanyak 6 susunan diagram panah yang berbeda untuk korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B .



Korespondensi Satu-Satu (Rumah dengan Nomornya) – Freepik

Banyak Korespondensi Satu-Satu

Apabila himpunan A dan B memiliki anggota sama banyak, maka dapat menghasilkan korespondensi satu-satu antara A dan B. Jika $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2\}$, banyak semua kemungkinan korespondensi satu-satu antara A dan B ada 2.

Seperti fungsi, melihat dari himpunan A. Kemungkinan pasangan $a \in A$ ada dua, yaitu 1 atau 2. Setelah a memiliki pasangan, kemungkinan pasangan b tersisa satu. Jadi, banyak kemungkinannya adalah $2 \times 1 = 2$.

Jumlah semua kemungkinan korespondensi satu-satu dari A ke B (jika jumlah elemennya sama) dapat dihitung menggunakan faktorial.

$$\text{Banyak korespondensi satu-satu} = n!$$

dengan n adalah jumlah elemen pada A dan B.

Himpunan dengan 3 Anggota

Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Akan dihitung kemungkinan korespondensi satu-satu antara A dan B. Pasangan a terdapat tiga kemungkinan, yaitu 1, 2, dan 3.

Setelah a memiliki pasangan, kemungkinan pasangan b tersisa 2 kemungkinan. Setelah c memiliki pasangan, maka c hanya memiliki 1 kemungkinan pasangan. Banyak total kemungkinan ada

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Himpunan dengan 4 Anggota

Diketahui $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Banyak kemungkinan pasangan a ada 4, yaitu salah satu dari 1, 2, 3, 4. Apabila a telah memiliki pasangan, maka pasangan b tersisa 3 kemungkinan. Setelah b memiliki pasangan, pasangan c tersisa 2 kemungkinan. Setelah c mempunyai pasangan, d memiliki 1 kemungkinan. Dengan demikian, jumlah kemungkinan korespondensi satu-satu antara A dan B adalah

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Contoh Soal

Diketahui himpunan $M = \{x \mid -3 < x < 4, x \text{ bilangan bulat}\}$ dan himpunan $N = \{x \mid x < 7, x \text{ bilangan asli}\}$. Tentukanlah banyaknya korespondensi satu-satu dari himpunan M ke himpunan N .

Pembahasan:

Diketahui:

$$M = \{x \mid -3 < x < 4, x \text{ bilangan bulat}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$N = \{x \mid x < 7, x \text{ bilangan asli}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

sehingga diperoleh $n(M) = 6$ dan $n(N) = 6$.

Banyak korespondensi satu-satu yang mungkin dari himpunan M ke himpunan N adalah sebanyak $n(M)! = n(N)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Jadi, banyak kemungkinan korespondensi satu-satu dari himpunan M ke himpunan N ada sebanyak 720.



Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan relasi dan fungsi diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang pengertian, perbedaan, dan penerapan relasi maupun fungsi. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

- 1) Hubungan relasi dapat digambarkan dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan pasangan terurut.
- 2) Untuk setiap x anggota himpunan A dan y anggota himpunan B , relasi dari A ke B dinyatakan dalam pasangan terurut (x, y) . Himpunan A disebut daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain).
- 3) Suatu relasi dikatakan sebagai fungsi jika:
 - ▷ setiap anggota domain mempunyai pasangan dan
 - ▷ pasangan dari anggota domain hanya satu.
- 4) Fungsi linear f adalah fungsi dengan formula $f(x) = ax + b$, dengan a dan b bilangan tertentu.
- 5) Jika A dan B adalah himpunan, banyak semua kemungkinan dari fungsi atau pemetaan adalah:

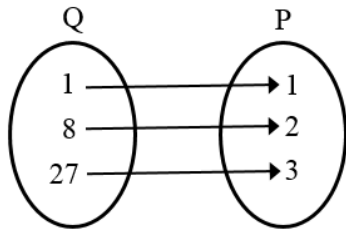
$$\frac{n(B) \times \dots \times n(B)}{n(A)} = n(B)^{n(A)}$$

- 6) Himpunan A berkorespondensi satu satu dengan B jika ada fungsi dari A ke B dan relasi inversnya juga berupa fungsi.
- 7) Jika himpunan A dan B berkorespondensi satu-satu, maka $n(A) = n(B)$.
- 8) Jika A dan B adalah himpunan dengan $n(A) = n(B) = N$, banyak semua kemungkinan korespondensi satu-satu yang dapat dibentuk adalah:

$$N \times (N - 1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$$

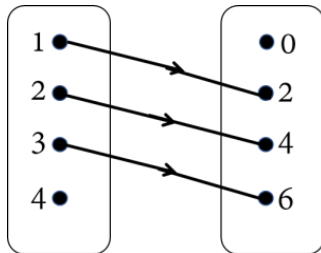
Latihan Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



Relasi yang tepat untuk menjelaskan hubungan himpunan Q ke himpunan P adalah ...

- akar pangkat tiga dari
 - pangkat tiga dari
 - kuadrat dari
 - akar kuadrat dari
2. Perhatikan gambar berikut.



Relasi yang tepat untuk diagram berikut adalah ...

- lebih dari
- kurang dari
- setengah dari
- kuadrat dari

3. Dari keempat himpunan berikut:

$$P = \{(1,1), (2,0), (2,1)\}$$

$$Q = \{(1,1), (3,2), (5,2)\}$$

$$R = \{(5,a), (5,b), (4,c)\}$$

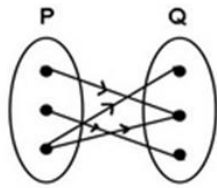
$$S = \{(1,6), (1,5), (1,4)\}$$

Himpunan pasangan berurut yang merupakan pemetaan (fungsi) adalah ...

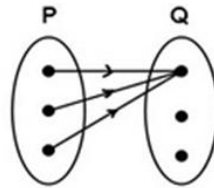
- P
 - Q
 - R
 - S
4. Diketahui titik A(-3,4). Pernyataan yang tepat mengenai posisi titik A pada bidang Kartesius adalah ...
- 3 satuan di atas sumbu X dan 4 satuan di kiri sumbu Y
 - 4 satuan di atas sumbu X dan 3 satuan di kiri sumbu Y
 - 3 satuan di bawah sumbu X dan 4 satuan di kanan sumbu Y
 - 4 satuan di bawah sumbu X dan 3 satuan di kanan sumbu Y

11. Diagram panah di bawah ini yang merupakan fungsi dari himpunan P ke himpunan Q adalah ...

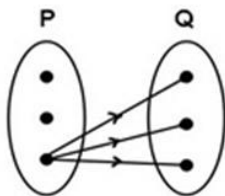
a.



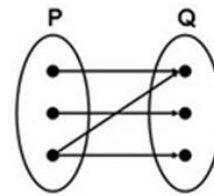
c.



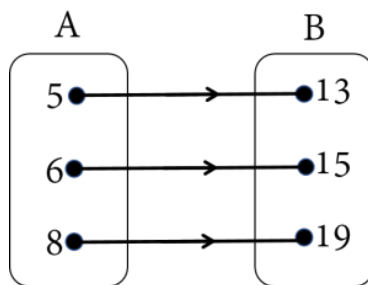
b.



d.



12. Perhatikan diagram panah berikut.



Rumus fungsi dari A ke B adalah ...

a. $f(x) = 2x + 7$

c. $f(x) = 5x - 12$

b. $f(x) = 3x - 2$

d. $f(x) = 2x + 3$

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

f
Latihan Soal Matematika
Kelas 8 BAB 2

Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Aqfi, F. 2023. Analisis metode pembelajaran relasi dan fungsi. *Arriyadhiyyat: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), 1–12.
- Meagher, M. 2023. Middle school concept of function. *Studies in Mathematics Education*, 55(1), 1–18.
- Kadyrzhan, A. 2025. Discrete Cartesian coordinate transformations: Using algebraic structures for mapping digital image elements. *Applied Sciences*, 15(3), 1464.
- Gunawan, Y., & Triyanti, N. 2024. Identification Number (Nomor Induk Kependudukan/NIK) as a single identity number for all public service administration in Indonesia. *International Journal of Law and Public Administration*, 8(2), 290–305.
- Sherman, M. 2018. Transforming students' definitions of function using a vending machine applet. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1043–1058.
- Huang, Z. 2021. Optimizing train timetable based on departure time and passenger demand. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 6611289.



BAB 3

PERSAMAAN GARIS LURUS

Karakter Pelajar Pancasila

Bernalar Kritis: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan garis lurus dan persamaan yang terbentuk.

Kreatif: Mampu mencari solusi permasalahan yang berkaitan dengan garis lurus.

Kata Kunci: Fungsi, Gradien, Persamaan Garis Lurus, Sejajar, Tegak Lurus, Titik.

Tujuan Pembelajaran: Bermain dengan Garis Lurus dan Persamaannya

1. Memahami bentuk persamaan garis lurus.

- ▷ Menyusun bentuk persamaan garis lurus, baik berupa bentuk umum, maupun grafik fungsi.
- ▷ Menggambar grafik fungsi linear pada diagram Cartesius.

2. Menentukan hubungan titik dan persamaan garis lurus.

- ▷ Menyajikan titik yang berada pada suatu garis lurus, maupun tidak berada pada garis.
- ▷ Menentukan gradien garis lurus apabila diketahui persamaan garisnya atau diketahui dua titik yang melalui garis tersebut.

3. Menentukan persamaan garis lurus.

- ▷ Menentukan persamaan garis lurus jika diketahui gradien garis dan sebuah titik yang dilaluinya.
- ▷ Menentukan persamaan garis lurus jika diketahui dua titik yang dilalui garis tersebut.

4. Menentukan bentuk garis dan permasalahannya.

- ▷ Mengidentifikasi garis-garis yang sejajar dan hubungan dua garis yang sejajar.
- ▷ Menentukan garis-garis yang tegak lurus dan hubungan dua garis yang tegak lurus.
- ▷ Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaan garis lurus.



F I T R I



1. Formula Fungsi

Fungsi Linear

Fungsi linear f merupakan fungsi dengan formula $f(x) = ax + b$ dengan a dan b bilangan tertentu. Apabila fungsi linear $f(x) = ax + b$, maka selanjutnya dapat membuat tabel nilai fungsi di beberapa titik bilangan bulat yang berurutan, yaitu

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
f(x)	...	$-3a + b$	$-2 + b$	$-1 + b$	b	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$...

Selisih berurutan terhadap dua nilai tersebut adalah a . Selanjutnya apabila terdapat satu fungsi linear tetapi hanya diketahui dua nilai fungsi tersebut seperti pada tabel berikut.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
f(x)	...					1	3		

Oleh karena selisih fungsi bernilai tetap, maka diperoleh:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
f(x)	...	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai $a = 2$. Untuk mencari nilai b , perlu dicari nilai $f(0)$. Nilai ini dapat diketahui berdasarkan selisih tersebut, yaitu:

Berdasarkan tabel di atas, diketahui bahwa $f(0) = -1$. Jadi, $b = -1$ dan formula fungsi yang dicari adalah $f(x) = 2x - 1$.

Contoh Soal

Diketahui fungsi linear $f(x) = 4x - 4$. Lengkapilah tabel berikut

x	2	0	1	-1	...
f(x)	3	-5	-1	...	0

Pembahasan:

▷ Untuk $x = -1$

$$f(x) = 4x - 4$$

$$f(-1) = 4(-1) - 4$$

$$f(-1) = -8$$

▷ Untuk $f(x) = 0$

$$4x - 4 = 0$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Berikut tabel yang sudah dilengkapi.

x	2	0	1	-1	1
f(x)	3	-5	-1	-8	0

Masalah yang Berkaitan dengan Fungsi Linear

Pengetahuan tentang fungsi linear akan diterapkan pada bagian ini.

Contoh Soal

Suatu Perusahaan diizinkan untuk mengurangi nilai aset mereka. Depresiasi garis lurus adalah istilah akuntansi untuk praktik ini. Masa pakai aset ditentukan melalui pendekatan ini. Setelah itu, aset tersebut disusutkan setiap tahunnya dengan jumlah yang sama sampai nilai kena pajaknya nol. CV. Spirit 45 menghabiskan Rp360.000.000,00 untuk sebuah truk baru. Nilai truk akan turun Rp12.000.000,00 setiap tahun. Harga kendaraan dinyatakan dalam persamaan penyusutan $y = 360.000.000 - 120.000.000x$ dengan x adalah umur truk dalam tahun.

Tentukan letak perpotongan garis dengan sumbu x dan sumbu y .

Pembahasan:

Dengan mensubstitusikan nilai $y = 0$, maka akan menghasilkan titik perpotongan garis dengan sumbu x .

$$y = 360.000.000 - 120.000.000x$$

$$0 = 360.000.000 - 120.000.000x$$

$$120.000.000x = 360.000.000$$

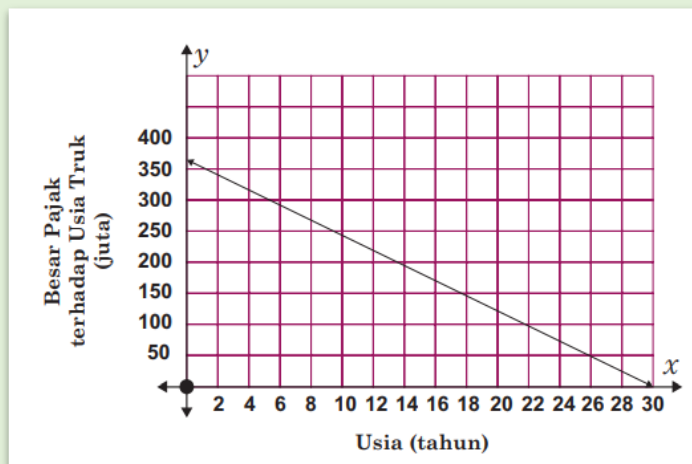
$$x = 30$$

Titik potong garis dengan sumbu x adalah $(30, 0)$.

Dengan mensubstitusikan nilai $x = 0$, maka akan menghasilkan titik perpotongan garis dengan sumbu y .

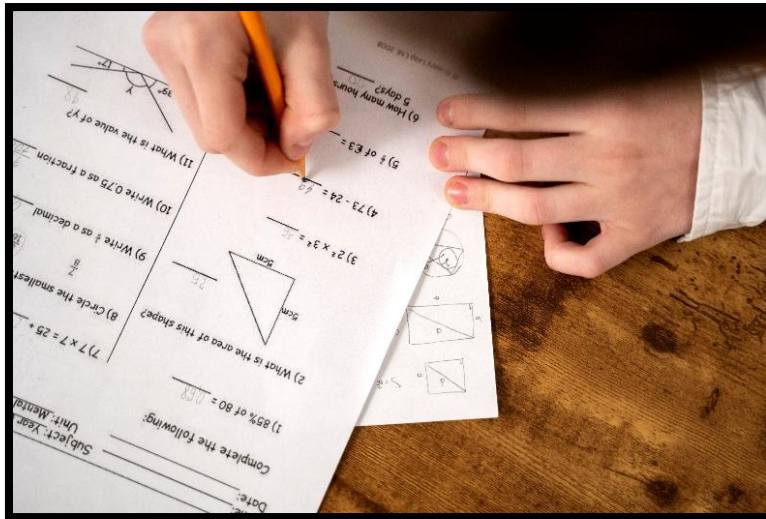
$$y = 360.000.000 - 120.000.000(0)$$

$$y = 360.000.000$$



Gambar di atas menunjukkan bahwa kendaraan tersebut berharga Rp0,00 ketika berumur 30 tahun, perpotongan garis dengan sumbu x berada di $(30, 0)$.

Perpotongan garis yang melalui sumbu- y di titik $(0, 360.000.000)$ menunjukkan bahwa besar biaya kendaraannya adalah Rp360.000.000,00 saat masih baru (0 tahun yang lalu).



Anak sedang Belajar Matematika – Freepik



Pojok Matematika

Jumlah kWh pada Listrik Token

- ▷ Sistem listrik Prabayar atau sering disebut listrik token bekerja dengan prinsip hubungan linear antara jumlah pembayaran dengan jumlah energi listrik yang diperoleh. Setiap pembelian token dengan nominal tertentu akan dikonversikan menjadi sejumlah kilowatt-hour (kWh) sesuai tarif dasar listrik yang berlaku. Hubungan ini bersifat proporsional, sehingga semakin besar nilai nominal token yang dibeli, semakin besar pula jumlah energi listrik yang diterima. Konsep tersebut sejalan dengan fungsi linear, di mana total kWh yang diperoleh bergantung secara langsung pada jumlah rupiah yang dibayarkan.
- ▷ Keteraturan fungsi linear dalam sistem listrik token memberikan kemudahan bagi pengguna dalam mengelola konsumsi energi. Dengan memahami hubungan lurus antara nominal pembayaran dan kWh yang diperoleh, perencanaan kebutuhan listrik dapat dilakukan secara lebih efisien. Sebagai contoh, ketika kebutuhan listrik meningkat pada bulan tertentu, cukup dilakukan penambahan pembelian token dengan nominal yang lebih besar. Pola ini menunjukkan penerapan nyata dari persamaan linear dalam kehidupan sehari-hari yang tidak hanya bersifat teoritis, tetapi juga mendukung aktivitas rumah tangga dan industri.
- ▷ Sistem listrik token juga dirancang agar proses pengisian dan penggunaannya berlangsung secara praktis. Setiap kode angka yang diperoleh dari pembelian token dimasukkan ke dalam meteran, kemudian secara otomatis saldo kWh bertambah sesuai nominal yang dibayarkan. Hubungan linear antara pembayaran dan energi listrik dapat langsung terlihat pada layar meteran, sehingga jumlah kWh yang tersedia selalu terukur dengan jelas. Mekanisme ini memastikan bahwa setiap transaksi pembelian token menghasilkan tambahan energi listrik dalam jumlah yang tepat, konsisten, dan mudah dipantau oleh pengguna.





2. Persamaan Garis Lurus



Kecepatan Mobil sebagai Penerapan Fungsi Linear – Freepik.com

Grafik fungsi linear akan selalu berupa garis lurus. Maka dari itu, fungsi linear biasa disebut dengan persamaan garis lurus.

Sebagai contoh, persamaan $y = 3x$. Apabila persamaan tersebut digambarkan dalam bentuk grafik dengan variabel (x, y) berupa bilangan (real), maka akan diperoleh grafik berupa garis lurus. Oleh karena itu, persamaan seperti $y = 3x$ dinamakan persamaan garis lurus yang selanjutnya cukup disebut dengan persamaan garis.

Persamaan garis dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk dan variabel sebagai berikut.

Semua titik dengan koordinat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$ax + by = c$$

dengan a, b , dan c bilangan real serta a dan b tak semuanya nol, membentuk garis lurus. Persamaan $ax + by = c$ dan $y = mx + c$ dinamakan persamaan garis lurus, dengan x dan y dinamakan variabel.

Contoh persamaan garis lurus adalah

$$x - 2y = 4$$

Untuk mencari titik yang terletak pada garis tersebut, salah satu variabel diberi suatu nilai, kemudian masukkan pada persamaan. Nilai variabel yang lain dihitung dari persamaan. Sebagai contoh, perhatikan penjelasan berikut.

- 1) Apabila $x = 0$ digantikan pada persamaan $x - 2y = 4$, maka diperoleh

$$0 - 2 \cdot y = 4$$

$$y = -2$$

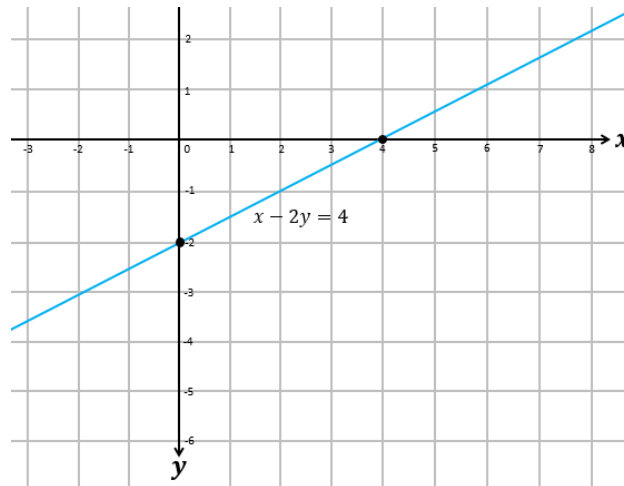
Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa titik $(0, -2)$ terletak pada garis.

- 2) Apabila $y = 0$ digantikan pada persamaan garis $x - 2y = 4$, maka diperoleh:

$$x - 2 \cdot 0 = 4$$

$$x = 4$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa titik $(4, 0)$ terletak pada garis. Perhatikan gambar berikut.



Sebaliknya, apabila diberi koordinat titik A(6, 1) dan B(3, 1), dapat dilakukan pengujian apakah titik tersebut terletak pada garis, yaitu dengan cara mengganti x dan y pada persamaan dengan koordinat pertama dan kedua dari titik.

- 1) Untuk titik A(6, 1), ganti x = 6 dan y = 1 pada persamaan garis

$$6 - 2 \cdot (1) = 4$$

$$4 = 4$$

Oleh karena persamaan bernilai benar, titik A terletak pada garis.

- 2) Untuk titik B(3, 1), ganti x = 3 dan y = 1 pada persamaan garis

$$3 - 2 \cdot (1) = 4$$

$$1 = 4$$

Persamaan tersebut bernilai salah. Dengan demikian, titik B tidak terletak pada garis.

Contoh Soal

Dengan menentukan titik perpotongan pada sumbu-x dan sumbu-y, gambarkan graiknya dari persamaan $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Pembahasan:

Menentukan titik potong masing-masing sumbu. Titik potong pada sumbu x, artinya $y = 0$.

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

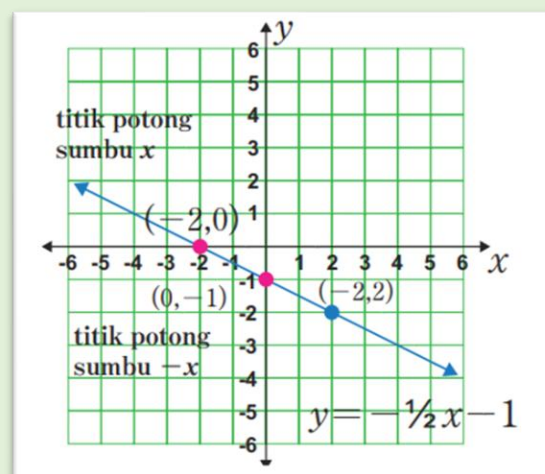
$$-\frac{1}{2}x - 1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = -2$$

Sehingga diperoleh titik potong pada sumbu x adalah (-2, 0).

Persamaan $y = -\frac{1}{2}x - 1$ membentuk garis lurus jika dua titik dihubungkan, seperti yang ditunjukkan pada gambar disamping





Pojok Matematika

Garis Horizon di Laut

- ▷ Pemandangan lautan yang seolah berbatasan langsung dengan langit menampilkan suatu garis lurus yang dikenal sebagai garis horizon. Ketika permukaan laut terlihat seolah-olah bertemu dengan langit di kejauhan, terbentuklah suatu garis horizontal yang tampak rata. Meskipun permukaan bumi sebenarnya berbentuk lengkung, jarak pandang yang terbatas membuat batas tersebut terlihat lurus. Fenomena ini menunjukkan keterkaitan antara persepsi visual dan sifat geometris dari bidang datar yang diproyeksikan dalam jarak jauh.
- ▷ Garis horizon dapat dianalisis menggunakan prinsip geometri dan koordinat kartesius. Permukaan laut yang diasumsikan datar pada jarak pandang tertentu dapat digambarkan sebagai sebuah garis horizontal dengan gradien nol. Konsep ini sejalan dengan persamaan garis lurus berbentuk $y = c$, yang menggambarkan garis sejajar sumbu x . Melalui pendekatan tersebut, garis horizon bukan hanya fenomena alam, melainkan juga representasi nyata dari model matematis sederhana.
- ▷ Selain sebagai objek kajian matematika, garis horizon memiliki peran penting dalam berbagai bidang. Dalam navigasi, garis horizon digunakan sebagai acuan orientasi arah pandang pelaut maupun penerbang. Dalam seni rupa dan fotografi, garis horizon dimanfaatkan sebagai elemen komposisi yang memberikan keseimbangan visual. Kehadirannya mengajarkan bahwa konsep dasar dalam matematika, khususnya persamaan garis lurus, dapat ditemukan secara langsung pada fenomena alam dan memiliki nilai aplikatif yang luas.





3. Gradien Garis



Ilustrasi Gradien – Freepik

Persamaan garis $ax + by = c$ dengan $b \neq 0$ dapat dibuat menjadi bentuk $by = -ax + c$ atau $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ dan dapat ditulis sebagai

$$y = mx + n$$

dengan $m = -\frac{a}{b}$ dan $n = \frac{c}{b}$.

Arti Geometri Bilangan m pada Garis $y = mx + n$

Jika (p, q) terletak pada garis $y = mx + n$, maka $q = mp + n$. Nilai y untuk $x = p + 1$ dapat dihitung sebagai:

$$y = m(p + 1) + n$$

$$= mp + m + n$$

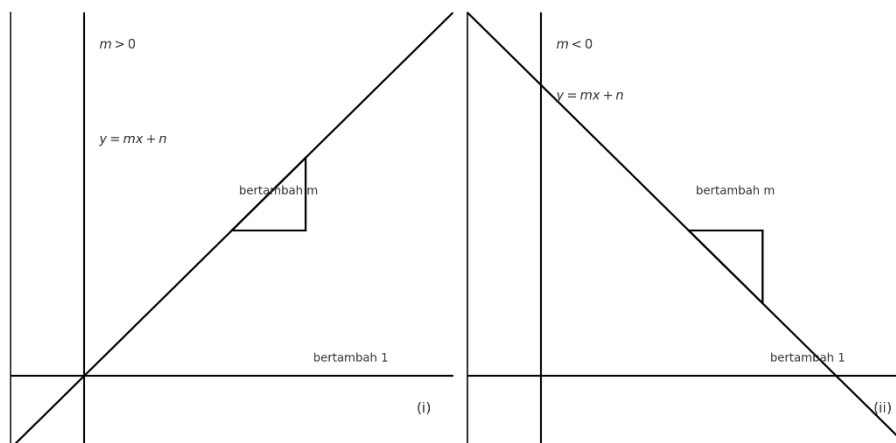
$$= mp + n + m$$

$$y = q + m;$$

dengan $q = mp + n$

Jadi, selisih nilai $x = p + 1$ dan $x = p$ adalah m

Bilangan m pada persamaan $y = mx + n$ menyatakan pertambahan koordinat kedua jika koordinat pertama bertambah 1.



Gradien Garis (Kemiringan)

Diketahui garis $y = \frac{1}{4}x$. Artinya, apabila x bertambah 1 satuan panjang, maka y akan bertambah $\frac{1}{4}$ satuan panjang. Apabila x bertambah 2 satuan panjang, maka nilai y bertambah $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4}$ satuan panjang. Begitupula seterusnya.

Apabila x bertambah 4 satuan panjang, maka nilai y bertambah 1 satuan panjang. Secara umum, diperoleh:

perubahan nilai $y = (\text{perubahan nilai } x) \cdot m$

Andaikan proses tersebut terjadi pada suatu jalan yang mendaki, setiap mobil bergerak horizontal sejauh 4 meter, maka ketinggian akan bertambah 1 meter. Oleh karena itu, angka tersebut dinamakan kemiringan atau gradien.

Kemiringan atau gradien suatu garis $y = mx + n$ adalah:

$$m = \frac{\text{perubahan nilai } y}{\text{perubahan nilai } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Khususnya, apabila perubahan nilai x sama dengan satu, maka:

$$m = \text{perubahan nilai } y$$

Apabila diketahui satu titik dan gradien, persamaan garis dapat ditentukan dengan:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Contoh Soal

Jika diketahui garis dengan kemiringan 3 yang melalui titik $A(2,5)$; tentukan persamaan garis tersebut.

Pembahasan:

titik $A(2,5)$, maka $x_1 = 2$ dan $y_1 = 5$ dan $m = 3$.

Persamaan garisnya adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

$$y - 5 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 6 + 5$$

$$y = 3x - 2$$

Jadi, persamaan garis dengan kemiringan 3 yang melalui titik $A(2, 5)$ adalah $y = 3x - 2$.

Arti Bilangan n pada Persamaan $y = mx + n$

Dalam persamaan garis lurus $y = mx + n$, telah dipahami bahwa m menunjukkan gradien yang menentukan kemiringan atau arah garis. Sementara itu, n menunjukkan intersep- y yaitu titik di mana garis memotong sumbu Y .

Misalnya substitusi $x = 0$ ke dalam persamaan, maka diperoleh:

$$y = m(0) + n = n$$

Dapat disimpulkan bahwa n menggambarkan posisi vertikal awal garis pada sumbu Y .

- 1) Apabila $n > 0$, maka garis memotong bagian atas sumbu Y .
- 2) Apabila $n < 0$, maka garis memotong bagian bawah sumbu Y .
- 3) Apabila $n = 0$, maka garis memotong sumbu Y di titik asal.



Pojok Matematika

Kemiringan Jalan

- ▷ Jalan yang membentang di daerah berbukit atau pegunungan sering kali memiliki kemiringan tertentu yang tidak bisa diabaikan dalam perencanaan. Ketika suatu jalan dibangun pada daerah perbukitan atau pegunungan, diperlukan perhitungan sudut kemiringan agar kendaraan dapat melintasinya dengan aman. Kemiringan tersebut merepresentasikan perubahan ketinggian terhadap perubahan jarak mendatar, yang dalam matematika dinyatakan melalui gradien. Semakin besar gradien, semakin curam pula jalan yang dihasilkan, sehingga berdampak langsung pada tingkat kesulitan dan keamanan dalam berkendara.
- ▷ Kemiringan jalan dapat dihubungkan dengan persamaan garis berbentuk $y = mx + c$, di mana nilai m menunjukkan gradien. Apabila jarak mendatar diandaikan sebagai sumbu x dan ketinggian sebagai sumbu y , maka perbandingan antara perubahan ketinggian dan perubahan jarak mendatar akan menghasilkan gradien jalan tersebut. Dengan cara ini, persoalan praktis dalam rekayasa transportasi dapat dimodelkan menggunakan prinsip sederhana dari persamaan garis lurus. Model ini memungkinkan perencana jalan untuk menentukan jalur yang efisien sekaligus tetap sesuai dengan standar keselamatan.
- ▷ Selain perannya dalam rekayasa sipil, pemahaman tentang kemiringan jalan juga memiliki nilai edukatif yang penting. Fenomena ini memberikan contoh konkret bagi siswa dalam memahami konsep gradien yang abstrak. Dengan mengaitkan teori matematika dengan situasi nyata, materi tentang persamaan garis lurus dapat disampaikan dengan lebih kontekstual. Hal ini membuktikan bahwa prinsip matematis bukan sekadar rumus di atas kertas, tetapi juga alat analisis yang memiliki relevansi langsung terhadap kehidupan sehari-hari dan pembangunan infrastruktur modern.





4. Garis Sejajar dan Tegak Lurus



Rel Kereta contoh Garis Sejajar – Freepik

Garis Sejajar

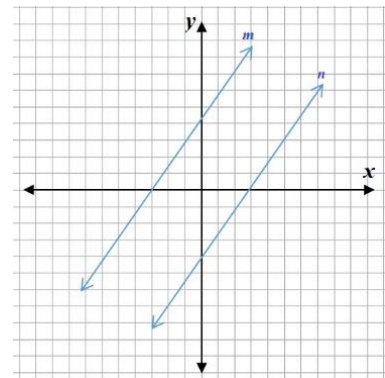
Dua garis dikatakan sejajar jika dan hanya jika kedua garis tersebut mempunyai gradien yang sama. dengan kata lain, memiliki bentuk $ax + by$ yang sama atau kelipatannya. Perhatikan tiga persamaan berikut.

$$2x - 3y + 5 = 0$$

$$2x - 3y + 1 = 0$$

$$2x - 3y + 2 = 0$$

Ketiga persamaan tersebut merupakan garis-garis sejajar.



Contoh Soal

Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(2, -5)$ dan sejajar dengan garis $4y - 3x = -4$.

Pembahasan:

Gradien garis $4y - 3x = -4$ adalah

$$m_1 = -\frac{\text{koefisien } x}{\text{koefisien } y} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

Karena sejajar, maka gradien garis $m = m_1 = \frac{3}{4}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-5) = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$4(y + 5) = 3(x - 2)$$

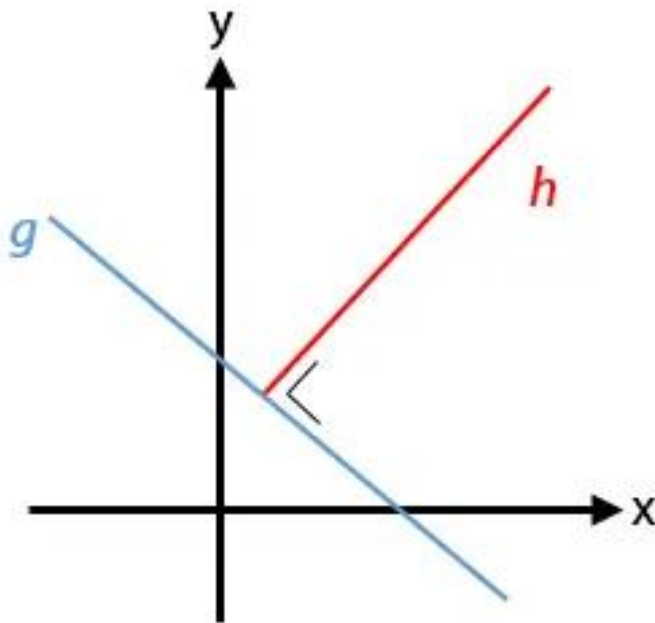
$$4y + 20 = 3x - 6$$

$$4y - 3x + 26 = 0$$

Jadi, persamaan garis yang melalui titik $(2, -5)$ dan sejajar dengan garis $4y - 3x = -4$ adalah $4y - 3x + 26 = 0$.

Garis Tegak Lurus

Untuk garis yang tidak melalui titik nol, analisis dapat dilakukan dengan menggunakan garis sejajar yang berpotongan di titik nol.



Dua garis, g dan h masing-masing dengan gradien m_g dan m_h saling tegak lurus jika dan hanya jika

$$m_g \times m_h = -1$$

Contoh Soal

Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(-2, 1)$ dan tegak lurus dengan garis $2y = -x + 1$.

Pembahasan:

Persamaan garis yang melalui titik (a,b) dan tegak lurus garis $ax + by = c$ adalah $bx - ay = ba - ab$. Persamaan garis yang melalui titik $(-2,1)$ dan tegak lurus garis $x + 2y = 1$ yaitu

$$2x - y = 2(-2) - 1(1)$$

$$2x - y = -5$$

$$-y = -2x - 5$$

$$y = 2x + 5$$

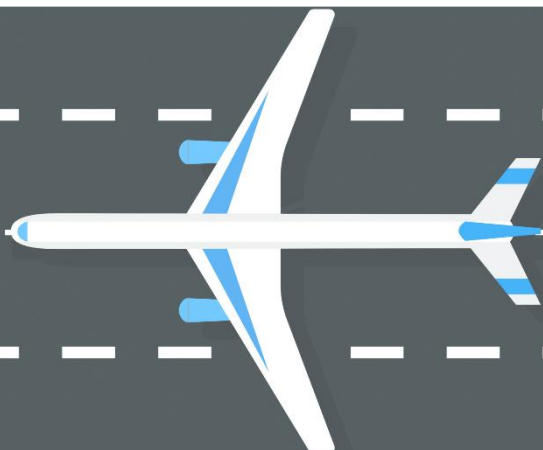
Jadi, persamaan garis yang melalui titik $(-2, 1)$ dan tegak lurus yang persamaannya $2y = -x + 1$ adalah $y = 2x + 5$.



Pojok Matematika

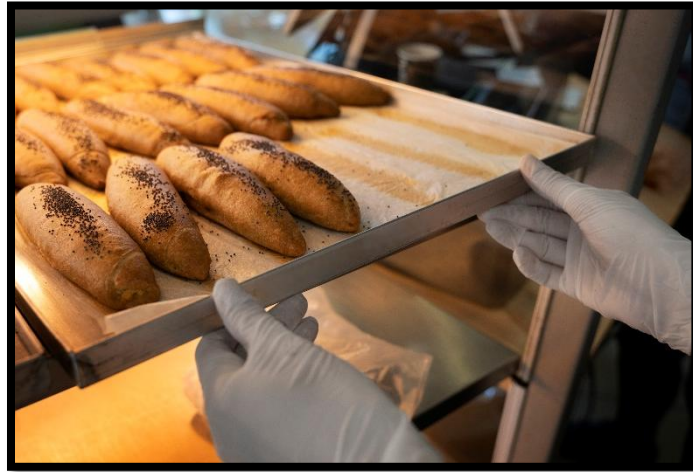
Runway Pesawat

- ▷ Landasan pacu bandar udara dirancang dengan bentuk lurus sebagai syarat utama bagi kelancaran proses lepas landas maupun pendaratan. Bentuk landasan dirancang lurus dengan tujuan memberikan jalur lepas landas dan pendaratan yang stabil. Ketika pesawat bergerak pada kecepatan tinggi, jalur lurus memungkinkan pergerakan yang terkendali tanpa hambatan perubahan arah mendadak. Struktur ini tidak hanya mendukung kelancaran operasi penerbangan, tetapi juga meningkatkan faktor keselamatan karena pilot dapat memfokuskan kendali pada kecepatan dan ketinggian tanpa harus menyesuaikan arah secara berulang.
- ▷ Dari sisi perencanaan teknis, keberadaan landasan pacu menunjukkan hubungan erat dengan prinsip geometri dan konsep garis lurus. Jalur yang lurus memberikan arah konstan sehingga vektor kecepatan pesawat dapat terjaga stabil. Panjang dan kemiringan landasan ditentukan berdasarkan jenis pesawat serta kondisi lingkungan sekitar, tetapi tetap mempertahankan kelurusan jalur sebagai faktor utama. Dengan demikian, prinsip dasar matematika yang sederhana dapat diimplementasikan pada infrastruktur kompleks yang memerlukan tingkat akurasi tinggi.
- ▷ Dalam lingkup yang lebih luas, landasan pacu memiliki peran strategis dalam menunjang sistem transportasi udara global. Konektivitas antarwilayah sangat bergantung pada kelancaran aktivitas lepas landas dan pendaratan, yang pada dasarnya difasilitasi oleh keberadaan jalur lurus tersebut. Keberhasilan sistem penerbangan modern menunjukkan bahwa konsep garis lurus bukan hanya gagasan abstrak dalam matematika, melainkan bagian integral dari teknologi yang menunjang mobilitas manusia. Hubungan ini menegaskan pentingnya pemahaman matematis dalam membangun fondasi bagi kemajuan infrastruktur transportasi.





5. Masalah yang Berkaitan dengan Persamaan Garis



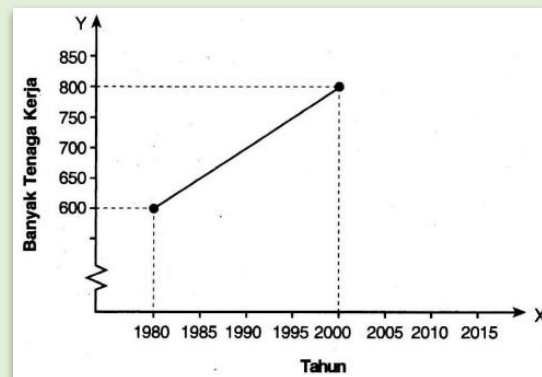
Ilustrasi Persamaan dalam Produksi–Freepik

Persamaan garis lurus akan digunakan untuk mempelajari gerak benda pada garis lurus atau mobil yang sedang bergerak di jalan raya. Pada garis atau jalan raya, dipilih satu titik tetap yang dinamakan titik asal.

Contoh Soal

Banyak tenaga kerja laki-laki berusia lebih dari 20 tahun yang bekerja di suatu kota bertambah secara linear. Jika digambarkan, grafik pertambahan tenaga kerja laki-laki dapat direpresentasikan oleh garis lurus berikut.

Pada tahun 1980, sekitar 600 laki-laki berusia di atas 20 tahun yang bekerja. Pada tahun 2000, jumlah ini meningkat menjadi 800. Berapa banyak tenaga kerja laki-laki di kota tersebut pada tahun 2015?



Pembahasan:

Gradien garis lurus pada grafik di atas dapat dihitung dengan cara berikut.

$$m = \frac{800 - 600}{2000 - 1980} = \frac{200}{20} = 10$$

Misalkan ada sebanyak x orang pada tahun 2015 sehingga dengan menggunakan konsep gradien, diperoleh

$$m = \frac{x - 800}{2015 - 2000}$$

Karena garis lurus yang ditinjau sama, maka gradiennya juga pasti sama.

$$10 = \frac{x - 800}{15}$$

$$150 = x - 800$$

$$x = 950$$

Jadi, banyak tenaga kerja laki-laki di kota tersebut pada tahun 2015 adalah 950 orang.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan relasi dan fungsi diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang pengertian, perbedaan, dan penerapan relasi maupun fungsi. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

- 1) Fungsi linear dalam x adalah fungsi dengan variabel (peubah) x yang berderajat satu, yakni fungsi yang berbentuk umum $f(x) = mx + c$ dengan m dan $c \in \mathbb{R}$. Grafik fungsi linear akan selalu berupa garis lurus. Oleh karena itu, fungsi linear biasa disebut dengan persamaan garis lurus.
- 2) Persamaan umum garis berbentuk $ax + by + c = 0$ dengan a , b , dan c bilangan real, dan salah satu dari a atau b tak nol.

- 3) Jika $b \neq 0$, maka persamaan garis dapat ditulis sebagai:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + n$$

dengan $m = -\frac{a}{b}$ dan $n = -\frac{c}{b}$. Bilangan m disebut gradien garis dan n menyatakan koordinat titik potong garis dengan sumbu Y .

- 4) Jika $b = 0$, persamaan garis berbentuk $ax + c = 0$ atau

$$x = -\frac{c}{a}$$

yaitu garis yang sejajar sumbu Y . Garis yang sejajar sumbu Y tidak mempunyai gradien.

- 5) Jika dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ terletak pada suatu garis, gradien garis tersebut adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dengan $y_2 - y_1$ adalah perubahan nilai y dan $x_2 - x_1$, perubahan nilai x .

- 6) Jika gradien garis (m) diketahui dan melalui titik $A(x_1, y_1)$, maka persamaan garis tersebut adalah

$$y = mx + n$$

dengan n ditentukan berdasarkan informasi bahwa A terletak pada garis. Oleh karena $y_1 = mx_1 + n$, maka $n = y_1 - mx_1$. Oleh karena itu, persamaan garis menjadi:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- 7) Persamaan garis melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- 8) Misalkan m_p dan m_l masing-masing menyatakan gradien garis p dan l .

▷ Garis p sejajar l jika dan hanya jika $m_p = m_l$.

▷ Garis p tegak lurus garis l jika dan hanya jika $m_p \cdot m_l = -1$.

- 9) Diketahui $\triangle ABC$ dengan $A(0, 0)$, $B(x_B, y_B)$, dan $C(x_C, y_C)$. Luas segitiga adalah bilangan positif $= \frac{1}{2}(x_B y_C - y_B x_C)$.

10) Diketahui ΔABC dengan $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, dan $C(x_C, y_C)$, bentuk:

$$\bar{x}_B = x_B - x_A$$

$$\bar{y}_B = y_B - y_A$$

$$\bar{x}_C = x_C - x_A$$

$$\bar{y}_C = y_C - y_A$$

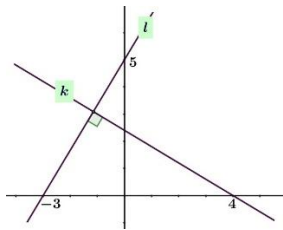
Luas ΔABC adalah bilangan positif $= \pm \frac{1}{2} (\bar{x}_B \bar{y}_C - \bar{x}_C \bar{y}_B)$.

11) Diketahui titik $P(x_p, y_p)$ dan garis $l: ax + by - c = 0$. Jarak titik P ke garis l adalah bilangan positif:

$$\frac{ax_p + by_p - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

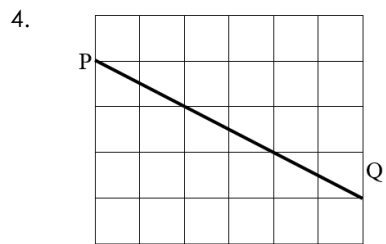
Latihan Soal

- Titik potong garis $3x + 4y = 12$ dengan sumbu x adalah ...
 - $(0, 3)$
 - $(4, 0)$
 - $(0, -3)$
 - $(-4, 0)$
- Titik potong garis $5x - 2y = -10$ dengan sumbu y adalah ...
 - $(-2, 0)$
 - $(2, 0)$
 - $(-5, 0)$
 - $(0, 5)$
- Perhatikan gambar berikut.



Persamaan garis k adalah ...

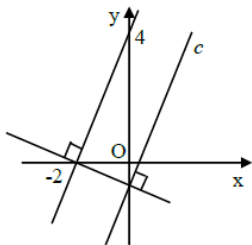
- $5y + 3x = 12$
- $5y + 3x = -12$
- $5y - 3x = 12$
- $5y - 3x = -12$



Gradien garis PQ berdasarkan gambar adalah ...

- -2
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{1}{2}$
- 2

- Perhatikan gambar berikut.



Gradien garis c adalah ...

- -2
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{1}{2}$
- 2

6. Diketahui persamaan garis:

I. $2x + 3y = 6$

II. $2x - 3y = -6$

III. $3x + 2y = 12$

IV. $3x + 2y = -12$

Dua garis saling tegak lurus adalah ...

a. I dan III

c. II dan III

b. II dan IV

d. I dan IV

7. Persamaan garis yang melalui titik $(2, -5)$ dan sejajar dengan garis $4y - 3x = -4$ adalah...

a. $3y + 4x + 2 = 0$

c. $4y - 3x - 26 = 0$

b. $3y - 4x - 2 = 0$

d. $4y - 3x + 26 = 0$

8. Sisi persegi ABCD sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat. Titik $A(1, -2)$ dan $C(5, 1)$ adalah titik sudut yang saling berhadapan. Persamaan garis yang melalui titik B dan D adalah ...

a. $3x + 4y + 7 = 0$

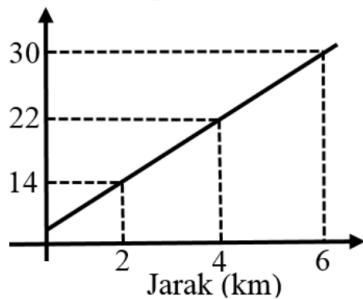
c. $4x - 3y + 7 = 0$

b. $3x + 4y - 7 = 0$

d. $3x - 4y + 7 = 0$

9. Perhatikan gambar berikut.

Tarif (ribuan rupiah)



Jika Rudi naik taxi sejauh 19 km, harga yang harus ia bayar adalah ...

a. Rp76.000,00

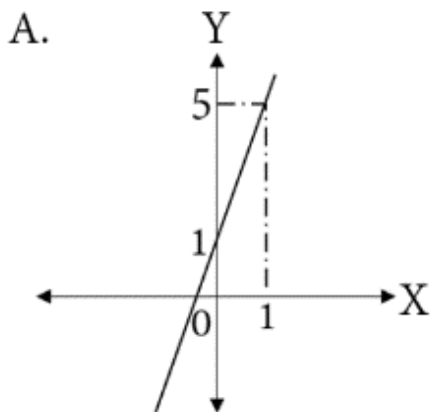
c. Rp84.000,00

b. Rp82.000,00

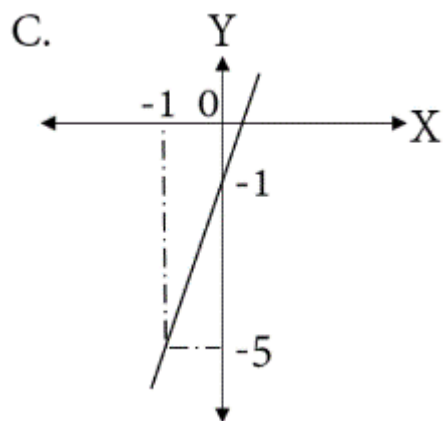
d. Rp88.000,00

10. Grafik garis dengan persamaan $4x - y - 1 = 0$ adalah ...

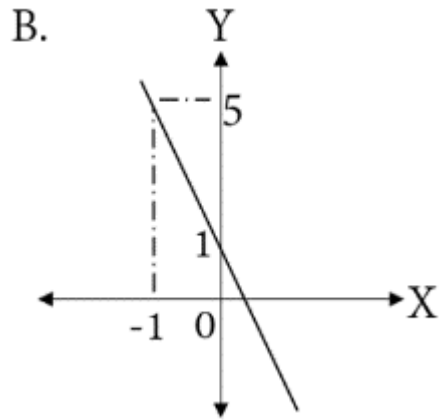
a.



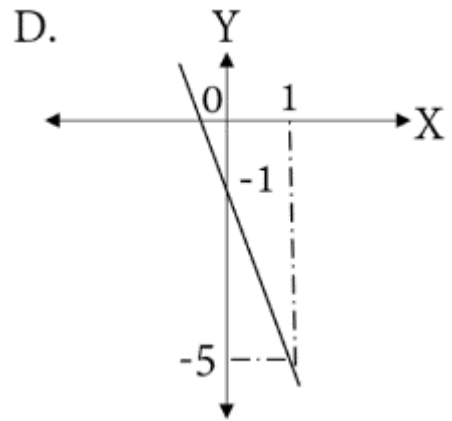
c.



b.



d.



Akses latihan soal
lainnya di sini yuk!


Latihan Soal Matematika
Kelas 8 BAB 3

Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Putri, V. W., & Purnomo, E. A. 2020. Representasi siswa SMP pada konsep persamaan garis lurus. *Jurnal Pendidikan Matematika Sekolah Dasar*, 2(2), 1–8.
- Fahlevi, M. R. 2024. Alternatif pembuktian hasil kali gradien dua garis tegak lurus dalam konteks matematika sekolah. *HEXAGON: Jurnal Ilmu dan Pendidikan Matematika*, 2(1), 30–48.
- Nursalim, N. 2023. Perancangan sistem pengisi token listrik otomatis berbasis IoT. *Jurnal Matematika dan Elektronika*, 12(1), 1–8.
- Solikin, A. 2017. Konsep kesejajaran garis dalam geometri Euclid dan aplikasinya pada horizon laut. *Jurnal Matematika Universitas Surabaya*, 3(1), 1–10.
- Dhoruri, M., & Markaban, M. 2011. Gradien garis lurus dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 1(1), 1–10.
- Kwee, C. 2023. Pengembangan geometrik sisi udara: Runway, taxiway, dan apron. *Jurnal Mahasiswa Teknik Sipil*, 1(1), 1–10.

BAB 4

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Karakter Pelajar Pancasila

Bernalar Kritis: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan sistem linear dua variabel.

Mandiri: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan sistem linear dua variabel.

Kata Kunci: Metode Grafik, Metode Eliminasi, Metode Substitusi, Penyelesaian, Persamaan Linear Dua Variabel, Sistem Persamaan Linear Dua Variabel.

Tujuan Pembelajaran: Mempelajari Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dalam Kehidupan

1. Membuat bentuk sistem persamaan linear dua variabel.

- ▷ Menyusun persamaan yang melibatkan dua variabel dalam bentuk yang sesuai.
- ▷ Membentuk sistem persamaan untuk menggambarkan hubungan antar variabel.

2. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dua variabel.

- ▷ Menghitung nilai-nilai variabel yang memenuhi semua persamaan dalam sistem.
- ▷ Menentukan pasangan nilai yang membuat kedua persamaan dalam sistem tersebut benar.

3. Menentukan suatu sistem persamaan linear yang mempunyai satu, tak hingga, dan tidak mempunyai penyelesaian.

- ▷ Mengidentifikasi sistem yang memiliki satu solusi yang unik, lebih dari satu solusi, atau tidak ada solusi sama sekali.
- ▷ Menilai sistem persamaan linear untuk mengetahui apakah sistem tersebut konsisten atau tidak, serta apakah ada solusi yang mungkin.

4. Menentukan penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear dua variabel menggunakan beberapa cara, yaitu metode grafik, substitusi, dan eliminasi.

- ▷ Menggunakan metode grafik untuk menemukan titik potong dua garis yang mewakili sistem persamaan.
- ▷ Menggunakan metode substitusi dan eliminasi untuk menemukan nilai variabel yang memenuhi sistem persamaan secara aljabar.

5. Memodelkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dalam bentuk sistem persamaan linear dua variabel.

- ▷ Mengubah masalah dunia nyata menjadi bentuk matematis yang melibatkan dua variabel.
- ▷ Menyusun persamaan yang menggambarkan hubungan antara dua variabel dalam permasalahan sehari-hari.
- ▷ Menerapkan konsep SPLDV untuk menemukan solusi yang sesuai dengan konteks masalah nyata yang dihadapi.



1. Permasalahan Dua Variabel

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali dihadapkan dengan permasalahan yang melibatkan dua hal saling berkaitan. Contoh paling sederhana dapat ditemukan saat berbelanja, menghitung waktu perjalanan, dan lain-lain. Banyak dari permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan pendekatan matematika melalui dua variabel yang berbeda, yang kemudian dihubungkan dalam bentuk persamaan.

Variabel merupakan lambang atau simbol yang digunakan untuk mewakili suatu nilai yang tidak tetap (bisa berubah-ubah), biasanya dilambangkan dengan huruf seperti x dan y .

Perhatikan contoh berikut.

Ani membeli 2 buku tulis dan 3 pensil dengan total harga Rp21.000, Budi membeli 4 buku tulis dan 2 pensil dengan total harga Rp32.000. Permasalahan ini dapat dinyatakan dengan dua variabel, yaitu x yang menyatakan harga 1 buku tulis dan y menyatakan harga 1 pensil.

Dari informasi tersebut, persamaan yang dapat dibentuk adalah:

$$2x + 3y = 21.000$$

$$4x + 2y = 32.000$$

Dengan menyusun masalah ke dalam bentuk seperti ini, dapat menyelesaikannya menggunakan berbagai metode.



Perlengkapan Sekolah – Freepik

Perhatikan masalah berikut.

Harga 3 cupcake dan 1 donat adalah Rp30.000.

Harga 2 cupcake dan 2 donat adalah Rp28.000.

Gunakan gambar untuk menyelesaikan masalah tersebut.





Pojok Matematika

Bermain Escape Room dengan SPLDV

- ▷ Escape Room adalah permainan berbasis teka-teki di mana peserta diminta keluar dari ruangan tertutup dengan cara menyelesaikan serangkaian tantangan. Dalam permainan ini, setiap petunjuk saling berkaitan hingga akhirnya mengarah pada kunci terakhir, seperti kode angka untuk membuka gembok. Cara bermainnya biasanya dimulai dengan pencarian petunjuk yang tersembunyi di sekitar ruangan, kemudian pemain harus menafsirkan informasi tersebut agar dapat disusun menjadi jawaban yang valid. Unsur waktu sering ditambahkan untuk meningkatkan keseruan, sehingga peserta harus berpikir cepat, bekerja sama, dan tetap teliti.
- ▷ Penerapan SPLDV dalam permainan Escape Room dapat dirancang melalui tantangan angka. Misalnya, sebuah gembok memiliki dua digit angka yang tidak diketahui. Di dalam ruangan terdapat dua catatan petunjuk: yang pertama menyatakan jumlah kedua digit adalah 15, dan yang kedua menyatakan perbedaan digit pertama dan kedua adalah 3. Kedua informasi ini dapat diterjemahkan menjadi dua persamaan linear. Setelah itu, penyelesaian dilakukan dengan metode eliminasi atau substitusi hingga ditemukan nilai kedua digit yang sesuai. Dengan demikian, matematika bukan hanya sekadar teori, melainkan alat langsung untuk memecahkan teka-teki nyata dalam permainan.
- ▷ Melalui tantangan seperti ini, Escape Room menjadi sarana menyenangkan untuk melatih keterampilan aljabar. Pemain dipaksa untuk menghubungkan informasi verbal dengan model matematika, kemudian mengolahnya hingga menghasilkan solusi praktis. Aktivitas semacam ini mengajarkan bahwa SPLDV tidak hanya dipelajari untuk keperluan akademis, tetapi juga dapat menjadi bagian dari permainan kreatif yang memacu adrenalin. Dengan memadukan logika, kerjasama, dan keterampilan matematis, Escape Room memperlihatkan bahwa penyelesaian persamaan linear memiliki daya tarik yang melampaui ruang kelas.





2. Persamaan Linear dengan Dua Variabel



Ilustrasi Menggambar Garis – Freepik.com

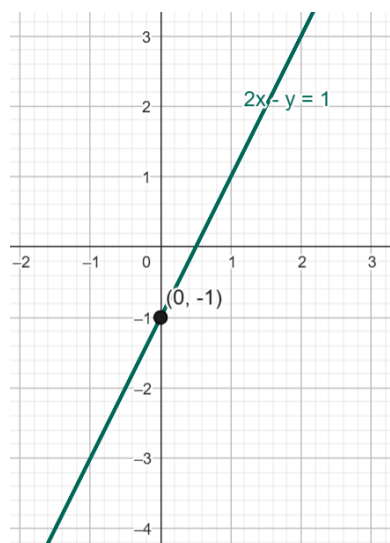
Diketahui dua variabel x dan y yang memenuhi persamaan linear berikut:

$$2x - y = 1$$

Pasangan nilai x dan y dapat diganti dengan berbagai kemungkinan. Untuk $x = 0$, maka $y = -1$. Untuk $y = 0$, maka $x = 1$. Kemungkinan lain seperti terlihat pada tabel berikut.

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5
y	-1	1	3	5	7	-3	-5	-7	-9	-11

Terdapat banyak kemungkinan pasangan bilangan x dan y yang memenuhi persamaan tersebut (Sebagai jawaban). Artinya, satu persamaan linear dua variabel tersebut memiliki banyak kemungkinan jawaban. Kumpulan dari semua jawaban persamaan linear ini membentuk garis yang terdiri atas titik-titik yang tidak terhubung satu sama lain.

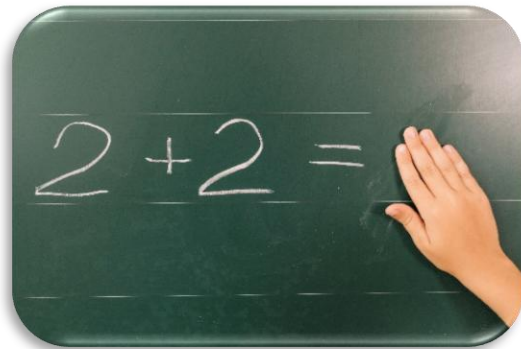


Karena satu persamaan linear dua variabel memiliki banyak solusi, maka diperlukan lebih dari satu persamaan untuk menemukan nilai unik dari masing-masing variabel. Inilah yang melahirkan konsep sistem persamaan.



Sejarah Simbol Sama Dengan

- ▷ Simbol '=' atau tanda sama dengan pertama kali diperkenalkan oleh Robert Recorde, seorang matematikawan asal Wales, pada tahun 1557 melalui karyanya *The Whetstone of Witte*. Sebelum kemunculan simbol ini, persamaan matematika dituliskan menggunakan kata-kata panjang seperti *is equal to* dalam bahasa Inggris atau padanan kata serupa dalam bahasa lain. Hal ini jelas menyulitkan penulisan, terutama ketika berhadapan dengan perhitungan yang melibatkan banyak persamaan. Recorde kemudian berinisiatif memperkenalkan simbol baru yang lebih ringkas dan mudah digunakan, sehingga komunikasi matematika dapat berlangsung lebih efisien.
- ▷ Alasan pemilihan bentuk dua garis sejajar untuk simbol '=' cukup sederhana namun penuh makna. Recorde menjelaskan bahwa tidak ada dua hal yang dapat lebih setara dibandingkan dua garis lurus dengan panjang yang sama dan berdampingan secara sejajar. Dengan dasar pemikiran tersebut, dua garis horizontal dijadikan representasi dari konsep kesetaraan dalam matematika. Ide ini dianggap sangat intuitif, karena simbol tersebut dapat langsung dimengerti tanpa memerlukan banyak penjelasan tambahan.
- ▷ Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, simbol '=' dengan cepat diterima oleh komunitas matematika di Eropa dan kemudian menyebar ke seluruh dunia. Simbol ini menjadi salah satu notasi paling penting dan mendasar dalam seluruh cabang matematika, mulai dari aljabar sederhana hingga teori kompleks modern. Keberhasilan Recorde dalam memperkenalkan simbol ini menunjukkan betapa besar pengaruh notasi terhadap kemajuan ilmu. Hingga saat ini, tanda '=' tetap digunakan secara universal sebagai simbol kesetaraan yang tidak tergantikan dalam komunikasi matematika maupun ilmu pengetahuan lainnya.





3. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel



Ilustrasi Grafik – Freepik



Dua persamaan linear yang masing-masing memiliki dua variabel yang sama membentuk sebuah sistem yang diselesaikan secara bersamaan. Persamaan tersebut diselesaikan untuk mencari satu pasang nilai (x, y) yang memenuhi kedua persamaan tersebut.

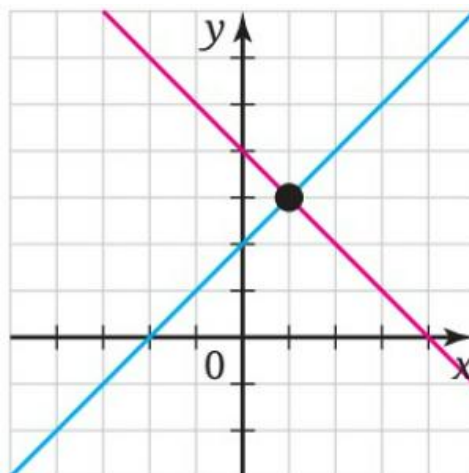
Secara umum, sistem persamaan linear dinyatakan sebagai berikut.

$$ax + by = p$$

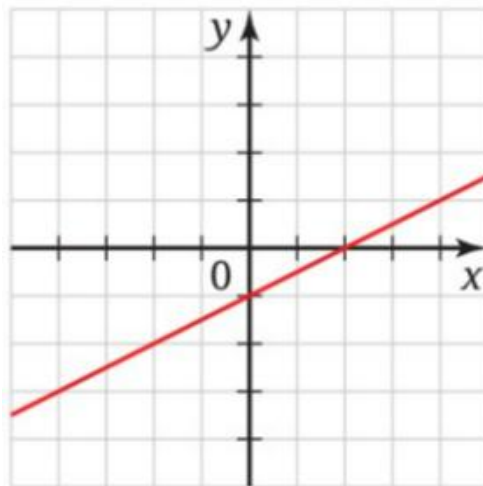
$$cx + dy = q$$

Apabila setiap persamaan dinyatakan dalam satu garis, maka terdapat 3 kemungkinan jawaban sistem persamaan linear.

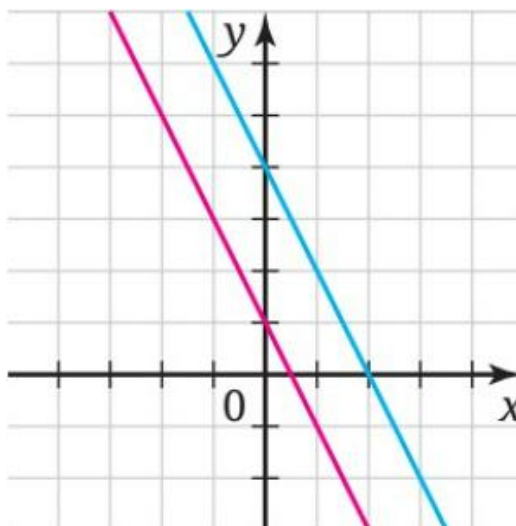
- 1) Mempunyai satu jawaban. Terjadi jika dua garis berpotongan.



2) Mempunyai banyak jawaban. Terjadi jika dua garis berimpit.



3) Tidak mempunyai jawaban. Terjadi jika dua garis sejajar.



Contoh Soal

Diketahui dua titik, yaitu $(2, -3)$ dan $(-3, 2)$.

- Pilihlah titik yang memenuhi persamaan $x + y = -1$.
- Pilihlah titik yang memenuhi persamaan $-3x + 2y = -12$.
- Pilihlah titik yang memenuhi sistem persamaan:

$$x + y = -1$$

$$-3x + 2y = -12$$

Pembahasan:

- Persamaan $x + y = -1$

Substitusi koordinat $(2, -3)$ ke persamaan $x + y = -1$. Diperoleh $2 + (-3) = -1$, adalah benar.

Substitusi koordinat $(-3, 2)$ ke persamaan $x + y = -1$. Diperoleh $-3 + 2 = -1$, adalah benar.

Jadi, kedua titik memenuhi persamaan $x + y = -1$.

- Persamaan $-3x + 2y = -12$

Substitusi koordinat $(2, -3)$ ke persamaan $-3x + 2y = -12$. Diperoleh $-3(2) + 2(-3) = -6 - 6 = -12$, adalah benar.

Substitusi koordinat $(-3, 2)$ ke persamaan $-3x + 2y = -12$. Diperoleh $-3(-3) + 2(2) = 9 + 4 = 13$, adalah salah.

Jadi, titik yang memenuhi persamaan $-3x + 2y = -12$ hanya titik $(2, -3)$.

- Karena kedua persamaan harus dipenuhi, hanya perlu memilih titik yang memenuhi kedua persamaan tersebut. Dari bagian (a) dan (b), diketahui bahwa hanya titik $(2, -3)$ yang memenuhi kedua persamaan.

Pembuktian:

$$x + y = 2 + (-3) = -1 \text{ (benar)}$$

$$-3x + 2y = -3(2) + 2(-3) = -6 - 6 = -12 \text{ (benar)}$$

Jadi, titik yang memenuhi sistem persamaan hanya titik $(2, -3)$.





4. Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel



Seseorang sedang Belajar – Freepik

Diketahui dua persamaan linear:

$$ax + by = p \quad \dots (1)$$

$$cx + dy = q \quad \dots (2)$$

Untuk menyelesaikan (mencari jawaban) sistem persamaan linear di atas terdapat beberapa cara yang sistematis. Berikut akan dibahas cara penyelesaian sistem persamaan di atas, yaitu:

- 1) metode grafik,
- 2) metode substitusi,
- 3) metode eliminasi.

Metode Grafik

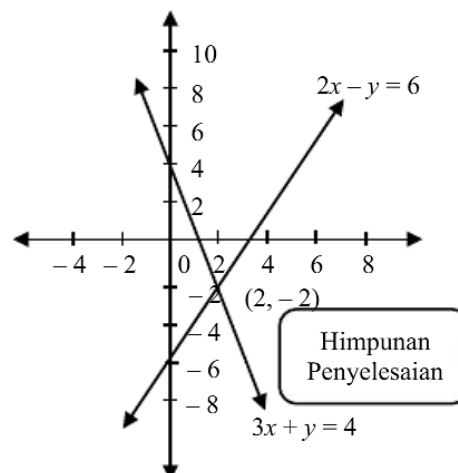
Titik-titik yang memenuhi setiap persamaan linear merupakan sebuah garis lurus. Maka dari itu, jawaban dari sistem tersebut adalah titik potong antara kedua garis. Sebagai contoh, perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

Untuk mendapatkan jawaban sistem persamaan linear tersebut, dapat dibuat tabel berikut.

$2x - y = 6$		
x	y	(x, y)
-1	-8	(-1, -8)
0	-6	(0, -6)

$3x + y = 4$		
x	y	(x, y)
-1	7	(-1, 7)
0	4	(0, 4)



Dari gambar di atas, terlihat bahwa titik potong kedua garis adalah pasangan bilangan yang secara serentak memenuhi kedua persamaan linear, yaitu titik (2, -2). Titik potong kedua garis merupakan penyelesaian sistem persamaan tersebut. Himpunan penyelesaiannya adalah {(2, -2)}.

Contoh Soal

Diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$x + y = 4$$

$$4x - y = 1$$

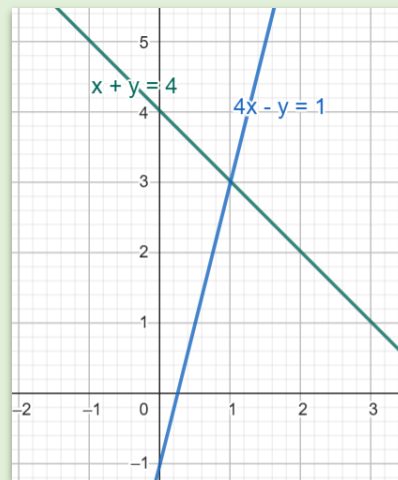
Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear di atas dengan cara menggambar kedua garis dan titik potongnya.

Pembahasan:

Untuk mendapatkan jawaban sistem persamaan linear tersebut, dapat dibuat tabel berikut

x + y = 4		
x	y	(x, y)
2	2	(2, 2)
0	4	(0, 4)

4x - y = 1		
x	y	(x, y)
1	3	(1, 3)
0	-1	(0, -1)



Titik potong kedua garis adalah pasangan bilangan yang secara serentak memenuhi kedua persamaan linear, yaitu titik (1, 3). Titik potong kedua garis merupakan penyelesaian sistem persamaan tersebut. Himpunan penyelesaiannya adalah {(1, 3)}.

Metode Substitusi

Kata substitusi berarti mengganti, dan dalam konteks ini, mengganti salah satu variabel di dalam suatu persamaan dengan ekspresi yang setara dari variabel tersebut, yang diperoleh dari persamaan lain.

Misalkan diketahui sistem persamaan:

$$x + y = 4 \quad \dots (1)$$

$$4x - y = 1 \quad \dots (2)$$

Salah satu persamaan diubah ke salah satu variabel, maka diperoleh $x + y = 4 \rightarrow x = 4 - y$.

Jika dituliskan dalam bentuk persamaan adalah:

$$4x - y = 1$$

$$4(4 - y) - y = 1$$

$$16 - 4y - y = 1$$

$$16 - 5y = 1$$

$$-5y = 1 - 16$$

$$-5y = -15$$

$$y = 3$$

Sekarang, telah diperoleh persamaan dengan satu variabel. Penyelesaian persamaan ini adalah $y = 3$. Selanjutnya, substitusi nilai y ke persamaan (1) sehingga diperoleh nilai $x = 1$.

Contoh Soal

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$x - 2y = 1 \quad \dots (1)$$

$$3x - 6y = 8 \quad \dots (2)$$

Sistem persamaan tersebut tidak mempunyai jawaban karena kedua garis tersebut adalah sejajar. Gunakan metode substitusi untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut.

Pembahasan:

Ubah salah satu persamaan ke bentuk salah satu variabel, diperoleh $x - 2y = 1 \rightarrow x = 1 + 2y$.

Jika dituliskan dalam bentuk persamaan adalah:

$$3x - 6y = 8$$

$$3(1 + 2y) - 6y = 8$$

$$3 + 6y - 6y = 8$$

$$3 = 8$$

Pernyataan $3 = 8$ adalah tidak benar, hal ini berarti tidak ada nilai x dan y yang dapat memenuhi kedua persamaan secara bersamaan. Artinya, sistem ini tidak memiliki solusi.

Metode Eliminasi

Metode ketiga yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear adalah metode eliminasi. Kata eliminasi mempunyai arti menghilangkan. Sistem persamaan linear diselesaikan dengan cara menghilangkan salah satu variabel dengan menjumlahkan atau mengurangkan dua persamaan.

Misalkan diketahui sistem persamaan berikut.

$$2x + y = 7 \quad \dots (1)$$

$$3x - y = 8 \quad \dots (2)$$

maka diketahui bahwa persamaan:

$$2x + y - 7 + k(3x - y - 8) = 0$$

dengan k merupakan suatu bilangan real, merupakan persamaan garis yang melalui titik potong dua garis pertama. Persamaan ini dapat ditulis sebagai berikut.

$$2x + y - 7 + 3kx - ky - 8k = 0$$

$$(2 + 3k)x + (1 - k)y - 7 - 8k = 0 \quad \dots (3)$$

Dengan memilih koefisien x sama dengan nol, yaitu:

$$2 + 3k = 0 \text{ atau } k = -\frac{2}{3}$$

Jadi, persamaan (3) adalah sebagai berikut.

$$(1 - [-\frac{2}{3}])y - 7 - 8(-\frac{2}{3}) = 0$$

Kalikan persamaan dengan 3, maka:

$$(3 + 2)y - 21 + 16 = 0$$

$$5y - 5 = 0$$

Persamaan terakhir memberikan jawaban $y = 1$. Gantikan nilai y ke salah satu persamaan, misalkan pada persamaan pertama, maka:

$$2x + 1 = 7$$

$$2x = 6$$

yang memberikan jawaban $x = 3$.

Persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan cara lain sebagai berikut.

$$2x + y = 7$$

$$\underline{3x - y = 8} \quad +$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Gantikan nilai x ke salah satu persamaan. Misalkan pada persamaan pertama, maka:

$$2 \cdot 3 + y = 7$$

$$6 + y = 7$$

$$y = 1$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut adalah $x = 3$ dan $y = 1$.



Contoh Soal

Gunakan metode eliminasi untuk menentukan jawaban sistem persamaan linear berikut.

$$2x - 3y = -13 \quad \dots (1)$$

$$x + 2y = 4 \quad \dots (2)$$

Pembahasan:

Dengan menggunakan metode eliminasi, diperoleh:

$$2x - 3y = -13 \quad | \times 1 | \quad 2x - 3y = -13$$

$$x + 2y = 4 \quad | \times 2 | \quad \underline{2x + 4y = 8} \quad -$$

$$-7y = -21$$

$$y = 3$$

Substitusi y pada salah satu persamaan, misalnya pada persamaan kedua.

$$x + 2y = 4$$

$$x + 2(3) = 4$$

$$x + 6 = 4$$

$$x = -2$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah $x = -2$ dan $y = 3$.



Pojok Matematika

Mengapa Variabel Sering Digambarkan dengan X dan Y?

- ▷ Penggunaan huruf x dan y dalam aljabar memiliki sejarah panjang yang berkaitan dengan perkembangan notasi matematika di Eropa. Pada awalnya, para matematikawan menggunakan huruf pertama dalam alfabet, seperti a, b, atau c, untuk mewakili bilangan yang belum diketahui. Namun, seiring meningkatnya kompleksitas perhitungan, diperlukan lebih banyak simbol untuk membedakan variabel yang berbeda. Pada abad ke-17, René Descartes dalam karyanya *La Géométrie* memperkenalkan kebiasaan membedakan huruf di awal alfabet untuk konstanta, sedangkan huruf di akhir alfabet, seperti x, y, dan z, digunakan untuk variabel yang tidak diketahui. Tradisi ini kemudian meluas dan menjadi standar hingga masa kini.
- ▷ Pemilihan huruf x memiliki cerita menarik yang melibatkan penerjemahan teks ilmiah. Pada masa penerjemahan naskah matematika dari bahasa Arab ke bahasa Latin dan Spanyol, terdapat kata "شيء" (shay') yang berarti "sesuatu" atau "hal yang tidak diketahui". Dalam transliterasi ke bahasa Spanyol, kata tersebut sering ditulis sebagai "xei" atau disingkat menjadi "x". Kebiasaan tersebut bertahan dan akhirnya masuk ke dalam tradisi penulisan matematika di Eropa. Oleh karena itu, huruf x perlahan-lahan menjadi lambang universal untuk melambangkan nilai yang belum diketahui, sementara huruf y sering digunakan sebagai pasangan untuk variabel kedua.
- ▷ Kebiasaan ini terus dipertahankan karena sifatnya yang praktis dan konsisten. Dalam pembelajaran matematika modern, huruf x dan y dianggap sebagai simbol standar yang mudah dikenali, sehingga mempermudah komunikasi dan pemahaman di seluruh dunia. Standarisasi ini juga mencegah kebingungan ketika berbagai negara atau budaya yang berbeda bertemu dalam forum ilmiah. Dengan demikian, keberadaan x dan y dalam aljabar bukan hanya sekadar kebetulan, melainkan hasil dari perjalanan sejarah, transliterasi bahasa, serta kebutuhan untuk menyederhanakan simbol dalam dunia matematika.





5. Masalah yang Berkaitan dengan SPLDV

Soal cerita yang berkaitan dengan sistem persamaan linear adalah memiliki dua kuantitas yang belum diketahui.



Ilustrasi Orang Bekerja–Freepik

Contoh Soal

Pak Dede bekerja selama 6 hari dengan 4 hari di antaranya lembur dan ia mendapat upah Rp74.000,00. Pak Asep bekerja selama 5 hari dengan 2 hari di antaranya lembur dan ia mendapat upah Rp55.000,00. Pak Dian bekerja 4 hari dan seluruhnya lembur. Mereka bertiga mendapat sistem upah yang sama. Tentukan upah yang diterima Pak Dian.

Pembahasan:

Misalkan L dan N berturut-turut menyatakan upah saat hari lembur dan upah saat hari normal.

Pak Dede bekerja selama 6 hari dengan 4 hari di antaranya lembur (2 hari sisanya normal) dan ia mendapat upah Rp74.000,00. Secara matematis, ditulis $4L + 2N = 74.000$.

Pak Asep bekerja selama 5 hari dengan 2 hari di antaranya lembur (3 hari sisanya normal) dan ia mendapat upah Rp55.000,00. Secara matematis, ditulis $2L + 3N = 55.000$.

Dengan demikian diperoleh SPLDV:

$$4L + 2N = 74.000 \quad \dots (1)$$

$$2L + 3N = 55.000 \quad \dots (2)$$

Persamaan (1) dapat disederhanakan menjadi $2L + N = 37.000$

Akan dicari nilai dari L dengan mengeliminasi N

$$2L + N = 37.000 \quad | \times 3 | \quad 6L + 3N = 111.000$$

$$2L + 3N = 55.000 \quad | \times 1 | \quad \underline{2L + 3N = 55.000} \quad -$$

$$4L = 56.000$$

$$L = 14.000$$

Jadi, upah untuk satu hari lembur adalah Rp14.000,00.

Diketahui bahwa Pak Dian bekerja selama 4 hari dan seluruhnya lembur. Upah yang diterima:

$$4l = 4(14.000) = 56.000$$

Jadi, upah yang diterima Pak Dian adalah sebesar Rp56.000,00.



Pojok Matematika

Peran SPLDV dalam Perekonomian

- ▷ Dalam kehidupan sehari-hari, kegiatan ekonomi sering kali melibatkan perhitungan yang tampak sederhana namun sebenarnya cukup kompleks. Misalnya, menentukan harga barang dari dua paket penjualan berbeda, menghitung keuntungan dari kombinasi produk, atau merancang strategi belanja dengan anggaran terbatas. Situasi-situasi tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV), karena metode ini mampu menguraikan hubungan antara dua variabel yang saling berkaitan. Dengan model matematis tersebut, persoalan nyata dalam transaksi jual beli maupun pengelolaan usaha dapat dipecahkan secara lebih cepat dan tepat.
- ▷ Selain dalam penentuan harga, SPLDV juga berfungsi dalam analisis produksi dan distribusi. Perusahaan dapat menghadapi permasalahan yang melibatkan keterbatasan sumber daya, seperti bahan baku atau tenaga kerja, serta kebutuhan untuk memproduksi lebih dari satu jenis barang. Dengan menyusun sistem persamaan linear yang mewakili keterbatasan dan target produksi, perusahaan dapat memperoleh gambaran jelas mengenai jumlah produksi yang optimal. Pendekatan ini membantu pengambil keputusan untuk merancang strategi bisnis yang efisien dan mampu memaksimalkan keuntungan tanpa melampaui batas sumber daya yang tersedia.
- ▷ Kepentingan SPLDV dalam perekonomian terletak pada kemampuannya menyederhanakan persoalan kompleks menjadi model matematis yang dapat diolah secara sistematis. Persamaan yang terbentuk memungkinkan perbandingan, prediksi, serta evaluasi terhadap berbagai variabel yang memengaruhi kegiatan ekonomi. Dengan memahami keterkaitan antarvariabel melalui SPLDV, analisis ekonomi dapat dilakukan dengan lebih terstruktur, sehingga hasil keputusan lebih akurat dan dapat dipertanggungjawabkan. Oleh karena itu, SPLDV menjadi konsep yang esensial untuk dipelajari sejak dini, agar pemahaman mengenai logika matematis dapat diterapkan pada persoalan nyata di bidang perekonomian.



Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang pengertian, penyelesaian, dan penerapan masalah sistem persamaan linear dua variabel. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

- 1) Persamaan linear dengan dua variabel berbentuk: $ax + by = c$ dengan a , b , dan c bilangan yang diketahui serta x dan y adalah variabel yang nilainya belum diketahui.
 - ▷ Persamaan linear dua variabel ini mempunyai banyak jawaban dalam bentuk pasangan (x, y) .
 - ▷ Kumpulan semua titik (x, y) yang memenuhi persamaan linear dua variabel berbentuk garis.

- 2) Sistem persamaan linear dua variabel dengan dua persamaan berbentuk

$$ax + by = p \quad \dots (1)$$

$$cx + dy = q \quad \dots (2)$$

dengan a , b , c , d , p , dan q adalah bilangan yang diketahui serta x dan y adalah variabel yang nilainya belum diketahui.

- 3) Oleh karena setiap persamaan pada sistem persamaan menyatakan garis, jawaban dari sistem persamaan adalah koordinat titik potong kedua garis
- 4) Banyak kemungkinan jawaban sistem persamaan linear:
 - ▷ Satu jawaban, jika garis pada sistem persamaan berpotongan.
 - ▷ Tidak mempunyai jawaban, jika garis pada sistem persamaan merupakan garis sejajar.
 - ▷ Mempunyai banyak jawaban, jika garis pada sistem persamaan merupakan garis berimpit.
- 5) Terdapat tiga metode menentukan jawaban sistem persamaan linear, yaitu: metode grafik, metode substitusi, metode eliminasi.

Latihan Soal

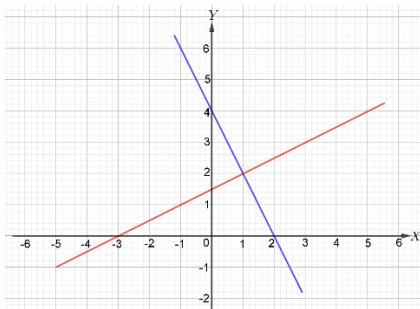
- Himpunan penyelesaian dari persamaan $2x + 4y = 8$ untuk $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $y \in Z$ adalah ...
 - $\{(2, 0), (1, 2), (0, 4)\}$
 - $\{(0, 2), (2, 3), (4, 4)\}$
 - $\{(0, -2), (2, -1), (4, 0)\}$
 - $\{(0, 2), (2, 1), (4, 0)\}$
- Jika x dan y merupakan penyelesaian sistem persamaan $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 14$, maka nilai $x + 2y$ adalah ...
 - 8
 - 9
 - 11
 - 13
- Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan.

$$x - y = 5$$

$$3x - 5y = 5$$

adalah ...

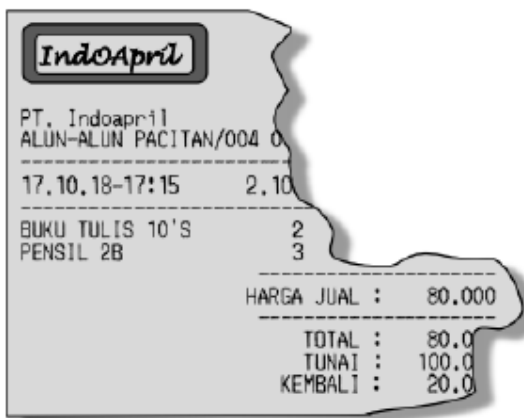
- $\{(-2, 9)\}$
 - $\{(10, 5)\}$
 - $\{(-5, 10)\}$
 - $\{(5, 10)\}$
- Perhatikan grafik berikut.



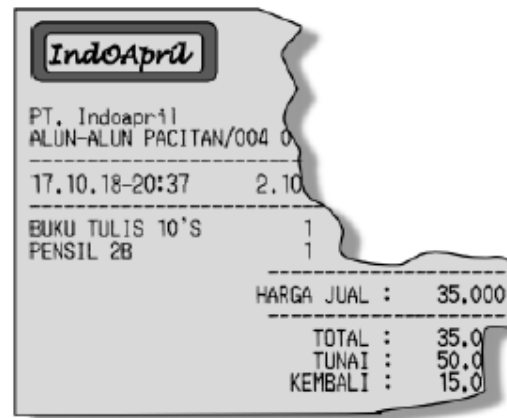
Titik $(1, 2)$ merupakan titik potong dua garis. Dengan kata lain, titik tersebut akan menjadi penyelesaian dari sistem persamaan ...

- $x + 2y = -3$ dan $2x - y = -4$
 - $x - 2y = -3$ dan $2x - y = -4$
 - $x + 2y = -3$ dan $2x + y = 4$
 - $x - 2y = -3$ dan $2x + y = 4$
- Jika x dan y adalah penyelesaian dari sistem persamaan $2x + 3y = 3$ dan $3x - y = 10$, maka nilai $2x - y = \dots$
 - 3
 - 4
 - 5
 - 7
 - Jumlah dua bilangan cacah adalah 27 dan selisih kedua bilangan itu adalah 3. Hasil kali kedua bilangan itu adalah ...
 - 81
 - 176
 - 180
 - 182

7. Harga 5 pensil dan 2 buku adalah Rp26.000,00, sedangkan harga 3 pensil dan 4 buku Rp38.000,00. Jika harga 1 pensil dinyatakan dengan a dan harga 1 buku dinyatakan dengan b , maka sistem persamaan linear dua variabel yang tepat sesuai masalah di atas adalah ...
- $5a + 2b = 26.000$ dan $4a + 3b = 38.000$
 - $5a + 2b = 26.000$ dan $3a + 4b = 38.000$
 - $2a + 5b = 26.000$ dan $3a + 4b = 38.000$
 - $2a + 5b = 26.000$ dan $4a + 3b = 38.000$
8. Harga 5 kg gula pasir dan 30 kg beras adalah Rp410.000,00, sedangkan harga 2 kg gula pasir dan 60 kg beras adalah Rp740.000,00. Harga 2 kg gula pasir dan 5 kg beras adalah ...
- Rp154.000,00
 - Rp80.000,00
 - Rp74.000,00
 - Rp32.000,00
9. Keliling lapangan yang berbentuk persegi panjang adalah 58 meter. Jika selisih panjang dan lebarnya 9 meter, maka luas lapangan tersebut adalah ... m².
- 95
 - 190
 - 261
 - 380
10. Perhatikan gambar berikut.



Gambar a



Gambar b

Gambar a dan b masing-masing menunjukkan potongan struk belanjaan Lucky dan Claresta di IndoApril Alun-alun Pacitan. Jika pada hari yang sama, Audrey memiliki uang Rp165.000,00 dan ingin membeli buku tulis 10's dan pensil 2B dengan kuantitas terbanyak, maka barang yang dapat dibeli olehnya adalah ...

- empat buku tulis 10's dan enam pensil 2B
- enam buku tulis 10's dan empat pensil 2B
- sepuluh buku tulis 10's dan enam pensil 2B
- enam buku tulis 10's dan delapan pensil 2B

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 8 BAB 4

Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Tashtoush, M. 2023. Conceptual understanding for systems of linear equations. *Natural Science*, 11(1), 1–8.
- Suherman, E. 2003. *Pengembangan model pembelajaran matematika*. Universitas Pendidikan Indonesia.
- Weisstein, E. W. 2006. Equals sign. *MathWorld*.
- Mazur, J. 2014. Why we use "x" as the unknown in math. *Today I Found Out*.
- Asghar, M. 2022. Economic models as an application of linear algebra. *Medium*.
- Piranda, K. 2024. Penerapan sistem persamaan linear dalam analisis ekonomi. *Aqlu: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 8(1), 1–10.
- Soleha, R. P., & Wulantina, E. 2023. Pengembangan permainan edukasi petualangan matematika berbasis SPLDV untuk meningkatkan kemampuan koneksi matematis siswa. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 12(2), 1202–1212.



BAB 5

KEKONGRUENAN PADA SEGITIGA

Karakter Pelajar Pancasila

Mandiri: Mampu memecahkan masalah matematika berkaitan dengan segitiga kongruen, baik pembuktian maupun penerapan teori.

Kreatif: Mampu mencari solusi permasalahan yang berkaitan dengan segitiga kongruen.

Kata Kunci: Garis, Kongruen, Segitiga, Sudut, Sudut Bertolak Belakang, Sudut Dalam, Sudut Luar.

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Segitiga Kongruen

1. Memahami pengertian garis dan sudut.

- ▷ Menjelaskan konsep dasar garis dan sudut.
- ▷ Menentukan garis dan sudut yang disajikan.

2. Membuat sudut, meliputi pengukuran penamaan.

- ▷ Menyajikan sudut mulai dari pengukuran dan penamaan.
- ▷ Menjelaskan cara membuat sudut.

3. Menentukan hubungan antardua sudut.

- ▷ Menjelaskan hubungan antardua sudut yang saling bertolak belakang.
- ▷ Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan sudut bertolak belakang.

4. Menjelaskan pengertian sudut dalam dan sudut luar segitiga.

- ▷ Mengidentifikasi sudut dalam dan sudut luar segitiga.
- ▷ Memahami perbedaan antara sudut dalam dan sudut luar segitiga.

5. Mengidentifikasi syarat-syarat kekongruenan pada segitiga.

- ▷ Memahami syarat-syarat kekongruenan pada segitiga dengan tepat.
- ▷ Menerapkan syarat-syarat kekongruenan segitiga untuk menyelesaikan berbagai masalah geometris.



F I T R I

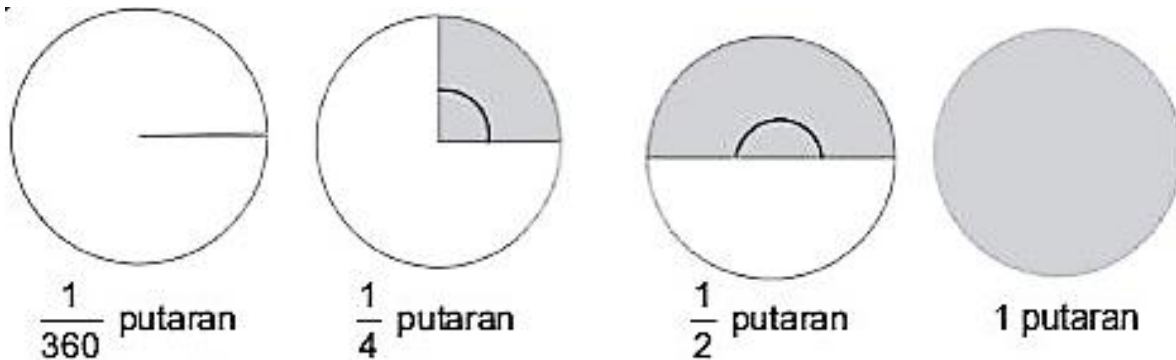


1. Garis dan Sudut

Sudut sebagai Ukuran Putaran

Sudut adalah ukuran putaran atau perputaran antara dua garis yang bertemu pada suatu titik yang disebut sebagai titik sudut. Putaran tersebut biasanya diambil berlawanan arah putaran jarum jam. Apabila searah jarum jam, sudut tersebut dibaca sebagai sudut bertanda negatif.

Besar sudut setengah putaran akan digambarkan sebagai garis lurus.



Sudut antara Dua Garis

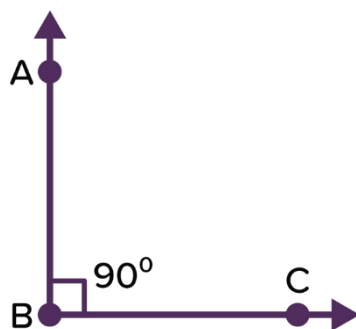
Secara sederhana, sudut antara dua garis adalah ukuran besar sudut yang terbentuk ketika dua garis berpotongan di suatu titik. Titik potong akan disebut sebagai titik sudut dan kedua garis dinamakan kaki sudut.

Ada dua macam sudut yang terbentuk dari perpotongan dua garis, yaitu sudut lancip (kurang dari 90°) dan sudut tumpul (lebih dari 90°). Namun, karena sudut antara dua garis yang lebih besar dari 180° dapat dianggap sebagai sudut yang setara dengan sudut yang lebih kecil dari 180°, maka biasanya hanya memperhitungkan satu sudut yang lebih kecil dari 180° saat mengukur sudut antara dua garis.



Untuk menghitung besar putaran secara lebih akurat, satuan derajat digunakan sebagai ukuran sudut. Satu putaran penuh memiliki besar 360°, yang dikenal sebagai 360 derajat. Sementara itu, besar setengah putaran adalah:

$$\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$$



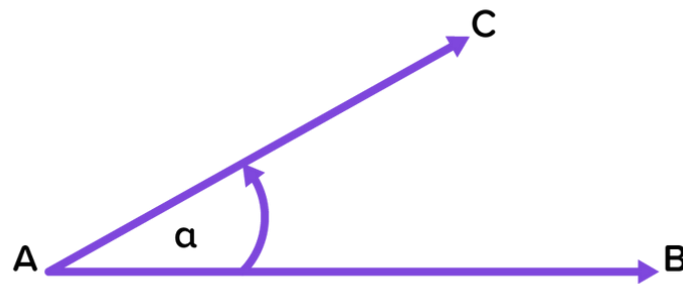
yang digambar sebagai garis lurus. Oleh karena itu, sudut dengan 180° dinamakan dengan garis lurus. Untuk mendapatkan 1°, maka besar sudut lurus tersebut dibagi 180.

Terdapat beberapa sudut yang memiliki sifat istimewa. Misalkan sudut lurus dibagi menjadi 2 bagian, hasilnya adalah sudut 90° atau sudut tegak. Oleh karena garis pertama merupakan garis mendatar, maka garis kedua harus garis tegak agar terbentuk sudut 90°.

Penamaan Sudut

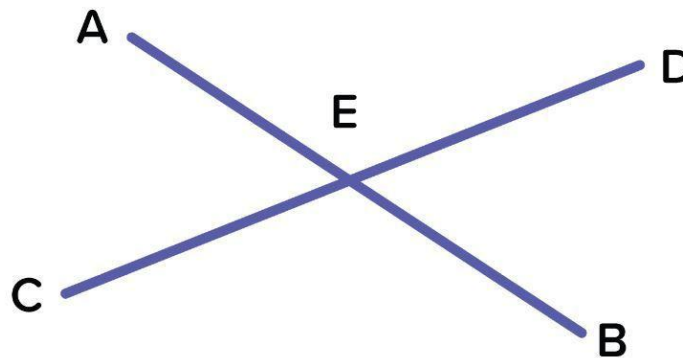
Penamaan sudut umumnya menggunakan satu huruf kapital sesuai dengan nama titik sudutnya. Dalam penulisan nama sudut, biasanya diawali dengan simbol "∠" yang dibaca sebagai sudut. Selain menggunakan satu huruf kapital, sudut juga dapat dinamai dengan tiga huruf kapital, di mana huruf tengah mewakili nama titik sudut, sementara dua huruf lainnya adalah nama titik yang terletak pada kaki sudut.

Perhatikan sudut pada gambar berikut. Nama sudut tersebut adalah $\angle A$ atau $\angle BAC$ atau $\angle CAB$.



Sudut Bertolak Belakang

Ketika dua garis saling berpotongan pada satu titik, akan membentuk dua pasang sudut yang saling berseberangan. Kedua sudut yang saling berseberangan tersebut dinamakan sudut bertolak belakang, karena mereka memiliki arah yang berlawanan tetapi besar sudutnya selalu sama.



Sebagai contoh, dua garis di atas berpotongan pada titik E dan membentuk sudut $\angle AED$ dan $\angle CEB$, maka sudut $\angle AED$ dan $\angle CEB$ adalah sudut bertolak belakang. Keduanya memiliki besar sudut yang sama karena mereka merupakan hasil dari rotasi atau pantulan simetris terhadap titik potong.

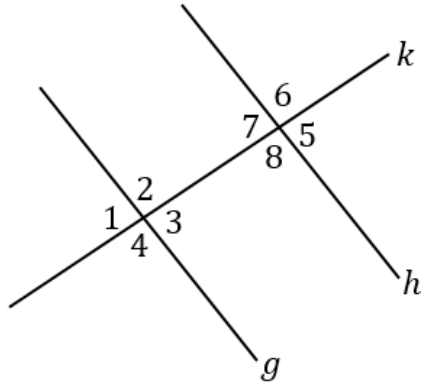
Hubungan Dua Garis

Terdapat dua kemungkinan apabila diketahui dua garis berbeda di sebuah bidang. Kedua garis tersebut saling berpotongan atau tidak berpotongan. Dua garis yang tidak berpotongan meskipun diperpanjang disebut sebagai garis sejajar.

Teorema 1:

Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° .

Menurut Euclid, ahli Matematika asal Yunani, untuk melihat kedudukan garis g dan h, cukup melihat jumlah sudut: $\angle g_2 + \angle h_6$.



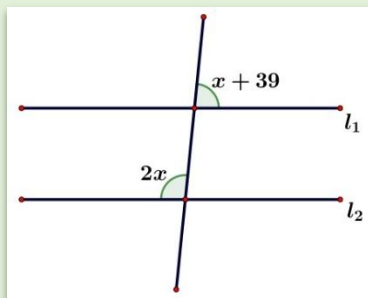
Garis g dan h sejajar jika dan hanya jika $\angle g_2 + \angle h_6 = 180^\circ$.

Apabila garis g dan h sejajar, maka $\angle g_2 + \angle h_6 = 180^\circ$. Sebaliknya, jika $\angle g_2 + \angle h_6 = 180^\circ$, maka garis g dan h sejajar. Oleh karena $\angle g_2 + \angle h_6 = 180^\circ$ sudut lurus, maka untuk menguji dua garis sejajar dapat dilakukan dengan cara menguji $\angle g_2 = \angle h_6$ atau sudut sehadapnya.

Selanjutnya, oleh karena sudut bertolak belakang sama besar, maka untuk menguji apakah dua garis sejajar dapat dilakukan dengan menguji apakah $\angle g_4 = \angle h_6$ atau sudut dalam berseberangan.

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Tentukan nilai x jika diketahui l_1 dan l_2 adalah dua garis yang sejajar.

Pembahasan:

Sudut $2x$ sehadap dengan $(180 - (x + 39))$ sehingga dapat diperoleh:

$$2x = 180 - (x + 39)$$

$$2x = 180 - x - 39$$

$$2x + x = 141$$

$$3x = 141$$

$$x = 47$$

Jadi, nilai x adalah 47.



Pojok Matematika

Peran Sudut pada Sundial

- ▷ Sejak ribuan tahun lalu, manusia telah memanfaatkan posisi matahari untuk mengetahui waktu dengan menciptakan alat sederhana bernama sundial atau jam matahari. Prinsip dasar alat ini adalah memanfaatkan posisi matahari di langit yang berubah seiring berjalannya waktu. Sebuah tongkat atau penunjuk tegak lurus yang disebut gnomon diletakkan pada bidang datar, lalu bayangan yang dihasilkan oleh sinar matahari menunjuk pada garis-garis tertentu. Garis-garis tersebut membentuk sudut dengan posisi gnomon, sehingga dapat menunjukkan waktu berdasarkan perubahan arah bayangan.
- ▷ Peran sudut pada sundial sangat penting karena setiap pergeseran matahari menghasilkan perubahan posisi bayangan. Pergeseran ini tidak terjadi secara acak, melainkan mengikuti pola teratur sesuai dengan rotasi bumi. Dengan membagi lingkaran penuh sebesar 360° ke dalam satuan waktu, garis penunjuk pada sundial dapat disusun sehingga setiap perubahan sudut bayangan sesuai dengan jam tertentu. Perhitungan ini menunjukkan bahwa hubungan antara garis, sudut, dan gerak matahari dapat dimanfaatkan secara praktis untuk kebutuhan sehari-hari.
- ▷ Sundial juga menunjukkan bahwa konsep garis dan sudut dapat diterapkan secara nyata dalam kehidupan. Akurasi alat ini bergantung pada ketepatan penempatan gnomon serta pembagian sudut pada bidang datar. Semakin presisi garis penunjuk dibentuk, semakin akurat pula waktu yang dihasilkan. Sundial menjadi bukti bahwa pemahaman sederhana tentang sudut dapat diterapkan dalam teknologi tradisional untuk memenuhi kebutuhan penting, yaitu mengukur waktu.



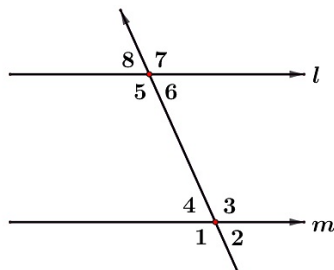


2. Pembuktian Dua Garis Sejajar



Contoh Garis Sejajar – Freepik.com

Apabila terdapat dua garis sejajar dipotong oleh garis ketiga, maka sudut sehadap akan sama besar. Berlaku pula sebaliknya.



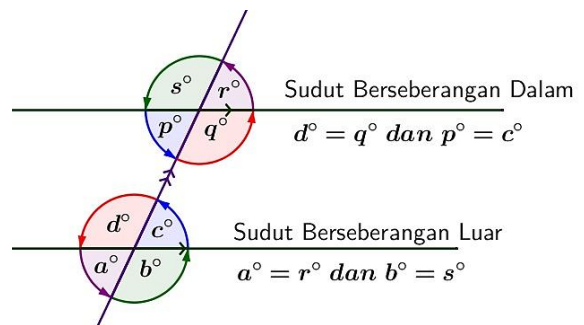
Aksioma 1:

Jika diketahui dua garis dipotong oleh sebuah garis transversal dan satu pasang sudut sehadapnya sama besar, maka pasangan garis tersebut sejajar.

Dengan mengacu pada gambar diatas, aksioma ini mengatakan jika besar sudut 1 dan 5 sama besar, atau 2 dan 6 sama besar, atau 3 dan 7 sama besar, atau 4 dan 8 sama besar, maka garis l sejajar garis m.

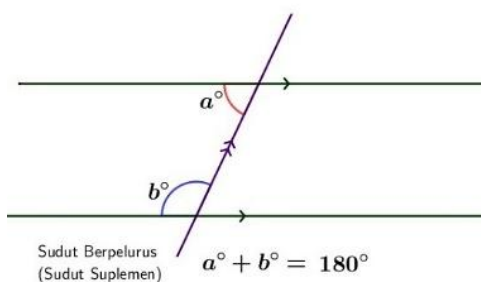
Teorema 2:

Jika diketahui dua garis dipotong oleh sebuah garis transversal dan satu pasang sudut dalam berseberangan sama besar, maka dua garis tersebut sejajar.



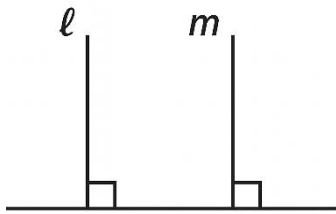
Teorema 3:

Jika dua garis dipotong oleh sebuah garis transversal dan sepasang sudut luar berseberangan sama besar, maka dua garis tersebut sejajar.



Teorema 4:

Jika diketahui dua garis dipotong garis ketiga dan jumlah sepasang sudut dalam sepihak (atau luar sepihak) sama dengan 180°, maka dua garis tersebut sejajar.



Teorema 5:

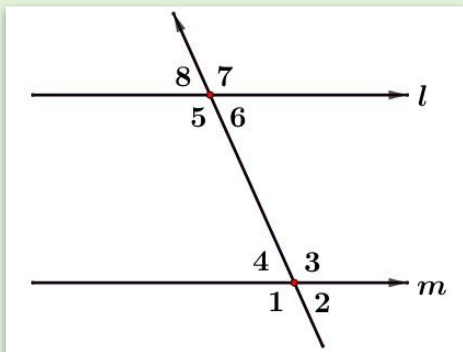
Jika garis l tegak lurus garis n dan m tegak lurus garis n maka garis l sejajar garis m .

Ada dua kemungkinan, garis l sejajar dengan garis m atau garis l berpotongan dengan garis m . Andaikan garis l dan m berpotongan, maka terjadi segitiga ABC dengan jumlah sudut = $90^\circ + 90^\circ + \angle C$.

Jadi, jumlah sudut dalam segitiga ABC lebih besar dari 180° . Hal ini tidak benar karena jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° , berarti kemungkinan garis l berpotongan dengan garis m tidak benar. Jadi, yang benar adalah garis l sejajar dengan garis m .

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Tentukan nilai x agar garis l sejajar dengan garis m , jika $\angle 6 = 2x$ dan $\angle 3 = 4x$.

Pembahasan:

Untuk menentukan nilai x agar garis l sejajar dengan garis m , perlu menggunakan sifat-sifat sudut yang terbentuk oleh dua garis sejajar yang dipotong oleh garis transversal.

Pada gambar tersebut, $\angle 6$ dan sudut $\angle 3$ merupakan sudut luar yang terbentuk oleh garis transversal m yang memotong garis l . Salah satu sifat yang berlaku adalah sudut luar yang berseberangan (seperti $\angle 6$ dan $\angle 3$) akan saling bertambah hingga menghasilkan 180° jika garis-garis tersebut sejajar.

Karena sudut luar yang berseberangan harus berjumlah 180° , maka kita bisa menuliskan persamaan:

$$\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$$

Substitusi nilai-nilai yang diberikan:

$$2x + 4x = 180$$

$$6x = 180$$

$$x = 30$$

Jadi, nilai x agar garis l sejajar dengan garis m adalah $x = 30^\circ$.



Segitiga dalam Struktur Kristal

- ▷ Kristal tersusun melalui keteraturan pola geometris yang berulang. Salah satu pola dasar yang sering muncul adalah bentuk segitiga kongruen. Pola ini mampu menghasilkan susunan yang rapat dan stabil, sehingga atom atau molekul dalam kristal dapat menempati posisi yang tetap. Keteraturan ini membuat kristal memiliki bentuk luar yang teratur, seperti prisma atau piramida, yang mencerminkan kesesuaian pola pada tingkat mikroskopis.
- ▷ Peran segitiga kongruen dalam struktur kristal memberikan efisiensi dalam penyusunan partikel. Susunan segitiga yang sama besar memungkinkan pengemasan atom atau molekul tanpa celah yang berlebihan. Efisiensi ini memberikan kestabilan energi, sehingga kristal dapat terbentuk dengan kuat dan tahan lama. Fenomena tersebut dapat ditemukan pada berbagai mineral, seperti kuarsa atau garam, yang memiliki bentuk simetris sebagai akibat dari keteraturan segitiga kongruen dalam strukturnya.
- ▷ Pola segitiga kongruen yang berulang juga memengaruhi sifat fisik kristal. Kilauan cahaya, kekerasan, hingga kemampuan memecah cahaya menjadi warna-warna tertentu merupakan hasil dari keteraturan geometris tersebut. Hubungan erat antara struktur mikroskopis dan bentuk makroskopis menjadikan kristal tidak hanya indah secara visual, tetapi juga penting dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Oleh karena itu, keteraturan segitiga kongruen dalam kristal dapat dipandang sebagai salah satu contoh nyata bagaimana prinsip geometri memberi pengaruh langsung terhadap fenomena alam.



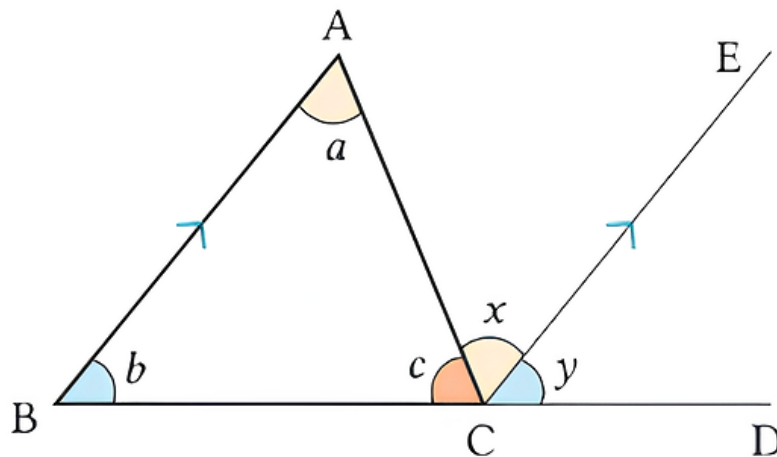


3. Sudut Dalam dan Sudut Luar Segitiga

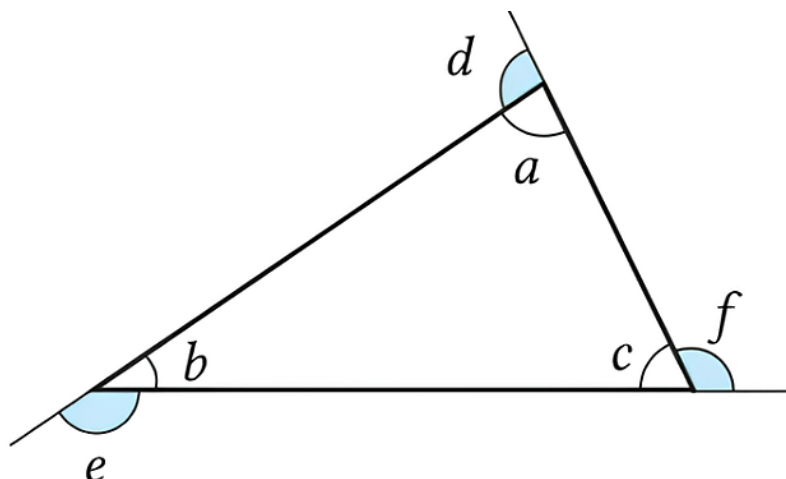


Seseorang Memegang Penggaris Segitiga – Freepik

Diketahui segitiga ABC. Sudut bagian dalam segitiga adalah sudut $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$. Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° .

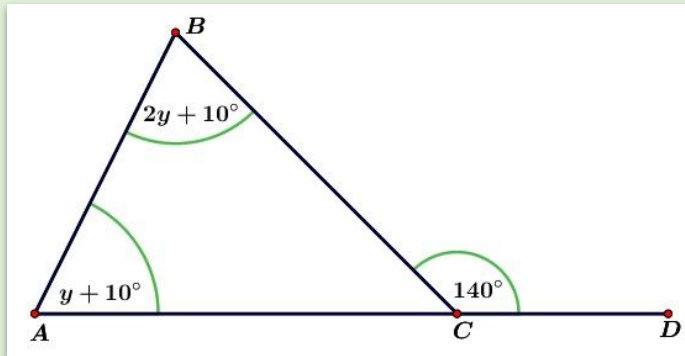


Sementara itu, sudut luar dari segitiga adalah sudut yang dibuat oleh sisi dan perpanjangan sisi. Perhatikan gambar berikut. Sudut luar segitiga adalah sudut $\angle D$, $\angle E$, dan $\angle F$.



Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Tentukan besar sudut BAC.

Pembahasan:

Berdasarkan informasi pada gambar, dapat diperoleh:

$$ACB + DCB = 180$$

$$ACB + 140 = 180$$

$$ACB = 180 - 140$$

$$ACB = 40$$

$$ABC + ACB + BAC = 180$$

$$2y + 10 + 40 + y + 10 = 180$$

$$3y + 60 = 180$$

$$3y = 120$$

$$y = 40$$

$$BAC = y + 10$$

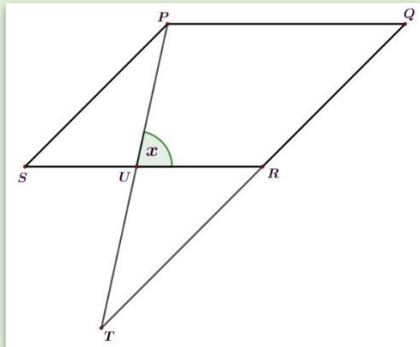
$$BAC = 40 + 10$$

$$BAC = 50$$

Jadi, besar sudut BAC adalah 50 derajat.

Contoh Soal

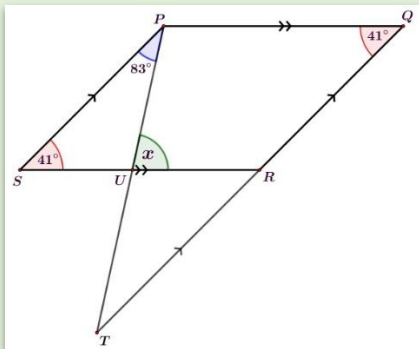
Perhatikan gambar berikut.



Diketahui sudut $\text{SPT} = 83$ dan sudut $\text{PQT} = 41$. Garis PQ dan RS sejajar, demikian juga garis PS dan QT sejajar. Tentukan besar nilai x .

Pembahasan:

Berdasarkan informasi pada gambar, dapat diperoleh:



Perhatikan segitiga SPU ,

$$\text{PSU} + \text{SPU} + \text{SUP} = 180$$

$$41 + 83 + (180 - x) = 180$$

$$124 + (180 - x) = 180$$

$$(180 - x) = 180 - 124$$

$$(180 - x) = 56$$

$$x = 180 - 56$$

$$x = 124$$

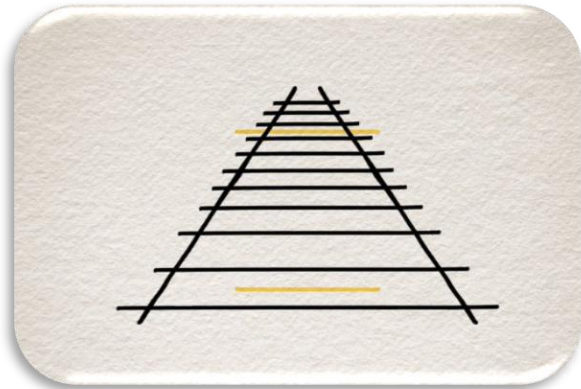
Jadi, besar nilai x adalah 124 derajat.





Ilusi Ponzo

- ▷ Di antara berbagai ilusi optik yang terkenal, Ilusi Ponzo menjadi salah satu contoh paling menarik dalam menunjukkan bagaimana otak ditipu oleh garis dan sudut. Ilusi ini menampilkan dua garis horizontal dengan panjang yang sama, diletakkan di antara dua garis miring yang menyerupai jalur rel kereta. Walaupun sebenarnya identik, garis horizontal yang berada di atas terlihat lebih panjang dibandingkan dengan garis yang berada di bawah. Fenomena ini terjadi karena otak menafsirkan gambar dua dimensi seolah-olah merupakan ruang tiga dimensi dengan sudut perspektif.
- ▷ Sudut yang terbentuk oleh dua garis miring memberikan kesan kedalaman pada gambar. Otak manusia terbiasa menafsirkan bahwa garis yang lebih tinggi dalam perspektif semacam itu berada lebih jauh. Karena jarak yang lebih jauh biasanya membuat objek tampak lebih kecil, otak mengompensasi persepsi ini dengan menganggap garis di bagian atas lebih panjang daripada yang di bawah. Dengan demikian, peran garis sejajar dan sudut perspektif menjadi kunci terbentuknya ilusi Ponzo.
- ▷ Ilusi Ponzo memperlihatkan bahwa sudut dan garis dapat membentuk persepsi yang berbeda dari kenyataan. Panjang garis yang sama dapat tampak tidak sama hanya karena ditempatkan dalam kerangka sudut tertentu. Fenomena ini menegaskan bahwa penglihatan manusia tidak selalu mencerminkan realitas fisik secara langsung, melainkan dipengaruhi oleh cara otak menginterpretasikan sudut dan perspektif.





4. Dua Segitiga yang Kongruen



Atap Rumah Dua Segitiga – Shila.co.id

Syarat Dua Segitiga Kongruen

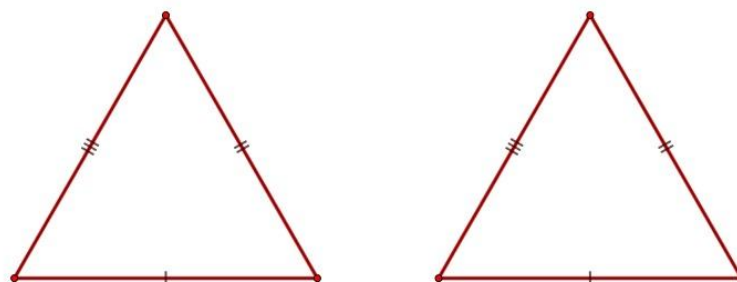
Dua bangun datar dikatakan kongruen atau tepat sama apabila seluruh sisi dan sudut yang bersesuaian memiliki ukuran yang sama, baik panjang maupun besar sudutnya. Dengan kata lain, satu bangun dapat menutupi bangun lain secara tepat tanpa ada bagian yang berlebih atau kurang, walaupun posisinya dirotasi, digeser, atau dicerminkan. Dalam kasus segi empat, keempat sisinya mungkin sama panjang, namun belum tentu kongruen jika sudut-sudutnya berbeda. Oleh karena itu, untuk dua segi empat dapat dikatakan kongruen, diperlukan kesamaan panjang sisi sekaligus kesamaan besar sudutnya.

Pada segitiga, penentuan kongruensi tidak memerlukan semua sisi dan sudut harus dibandingkan. Cukup beberapa pasangan sisi dan sudut tertentu yang memenuhi salah satu syarat berikut: (1) SSS (Sisi-Sisi-Sisi) yaitu ketiga sisi bersesuaian sama panjang; (2) SAS (Sisi-Sudut-Sisi) yaitu dua sisi dan sudut di antara keduanya sama besar; (3) ASA (Sudut-Sisi-Sudut) yaitu dua sudut dan sisi di antara keduanya sama panjang; (4) AAS (Sudut-Sudut-Sisi), yaitu dua sudut dan satu sisi yang bukan di antara keduanya sama panjang; dan (5) RHS (Siku-siku-Hipotenusa-Sisi), yang berlaku untuk segitiga siku-siku jika sisi miring (hipotenusa) dan satu sisi lainnya sama panjang.

Dalam menuliskan pasangan segitiga kongruen, urutan huruf yang mewakili titik sudut harus sesuai dengan titik-titik bersesuaian. Misalnya, jika dituliskan $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, maka sisi AB berpasangan dengan DE, BC dengan EF, dan CA dengan FD; sedangkan sudut A berpasangan dengan sudut D, sudut B dengan sudut E, dan sudut C dengan sudut F. Hal ini memastikan bahwa korespondensi antara sisi dan sudut bersesuaian tetap konsisten, sehingga hubungan kongruensi dapat dinyatakan dengan tepat.

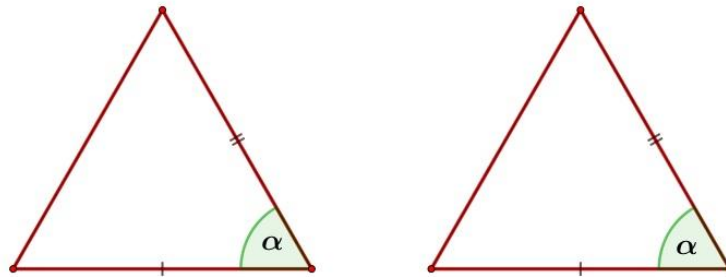
a. Syarat Tiga Sisi (SSS)

Misalkan ada dua segitiga. Jika ketiga sisi pada segitiga pertama masing-masing sama panjang dengan ketiga sisi pada segitiga kedua, maka dua segitiga tersebut kongruen.



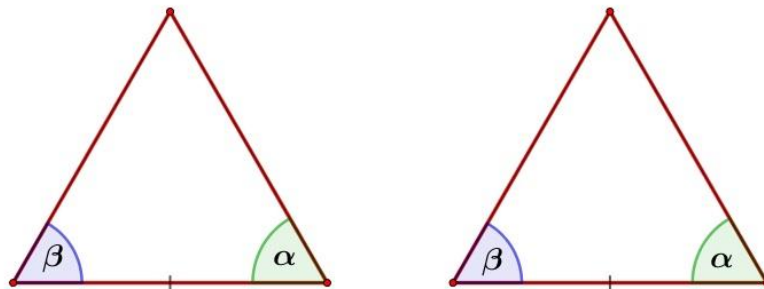
b. Syarat Dua Sisi dan Satu Sudut Apit (SAS)

Misalkan ada dua segitiga. Jika segitiga pertama mempunyai dua sisi yang masing-masing sama panjang dengan dua sisi segitiga kedua, serta sudut yang diapit kedua sisi tersebut sama besar, maka dua segitiga tersebut kongruen.



c. Syarat Satu Sisi dan Dua Sudut (ASA)

Misalkan ada dua segitiga. Jika segitiga pertama mempunyai satu sisi yang sama panjang dengan satu sisi pada segitiga kedua dan besar dua sudut pada segitiga pertama sama dengan besar dua sudut pada segitiga kedua, maka dua segitiga tersebut kongruen.



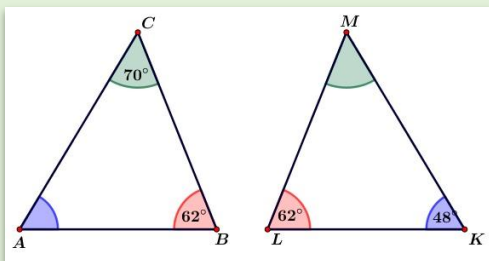
Jika salah satu syarat (SSS, SAS, atau ASA) dijadikan dasar, maka dapat dibuktikan bahwa dua syarat yang lain juga benar. Pada pelajaran yang lebih lanjut, syarat SAS diterima sebagai aksioma (dasar) dan harus membuktikan dua yang lainnya.

Contoh Soal

Diketahui segitiga ABC dan KLM kongruen. Besar $\angle KLM = 62^\circ$, $\angle MKL = 48^\circ$, $\angle ABC = 62^\circ$, dan $\angle ACB = 70^\circ$. Tentukan pasangan sisi yang sama panjang pada kedua segitiga tersebut.

Pembahasan:

Berdasarkan informasi pada soal, diperoleh gambar sebagai berikut.

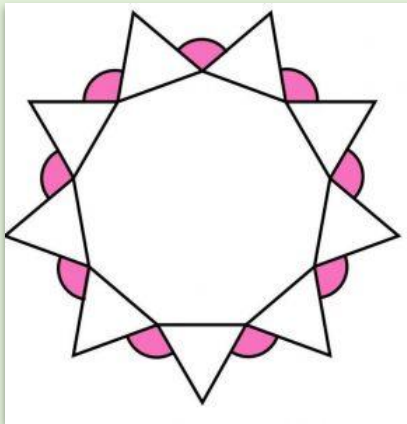


Dari gambar di atas, beberapa hal yang dapat disimpulkan;

Dari informasi sudut pada segitiga di atas dapat kita peroleh sisi yang sama panjang yaitu sisi di depan sudut yang sama besar, $BC = LM$, $AC = KM$, dan $AB = LK$.

Contoh Soal

Diketahui sebuah bintang dibentuk dari sejumlah segitiga sama sisi di setiap sisi sebuah segi sembilan (nonagon) beraturan.



Berapakah jumlah dari besar sudut yang ditandai dengan warna merah muda?

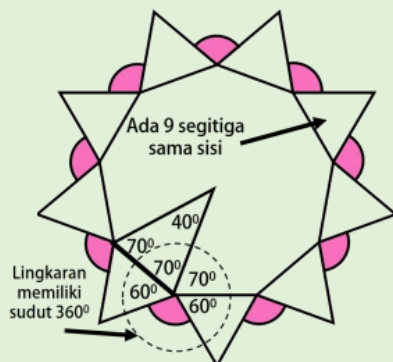
Pembahasan:

Pada segi sembilan, besar sudut masing-masing juring pembentuknya adalah $360^\circ \div 9 = 40^\circ$. Karena segitiga yang terbentuk dari juring tersebut berbentuk segitiga sama kaki, besar sudut kakinya adalah $180 - 40 \div 2 = 70^\circ$.

Catatan: Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° .

Untuk itu, besar tiap sudut yang terbentuk oleh segi sembilan adalah $2 \times 70^\circ = 140^\circ$.

Perhatikan gambar berikut.



Besar semua sudut pada segitiga sama sisi adalah 60° .

Besar sebuah sudut merah muda itu adalah $360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 140^\circ = 100^\circ$. Karena ada 9 sudut yang sama, jumlahnya sebesar $9 \times 100 = 900$.

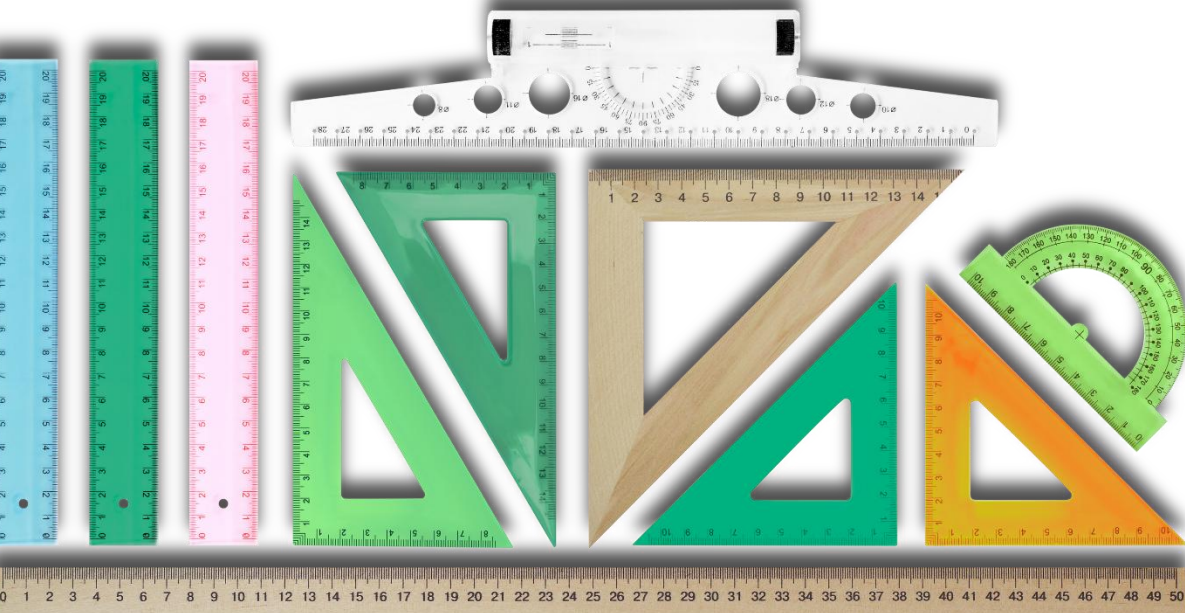
Jadi, jumlah besar sudut yang ditandai dengan warna merah muda adalah 900.



Pojok Matematika

Dibalik Bentuk Layang – layang

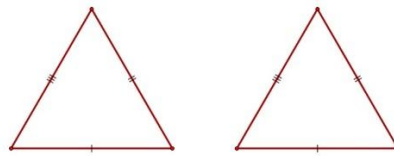
- ▷ Dalam proses pembuatan layang-layang, pemilihan bentuk geometris menjadi hal yang sangat penting. Keseimbangan saat terbang di udara tidak hanya dipengaruhi oleh bahan dan benang, melainkan juga oleh rangka yang disusun dari dua segitiga kongruen. Kedua segitiga tersebut membentuk bidang simetris sehingga angin dapat mengalir dengan stabil di sisi kanan dan kiri. Keselarasan ini memungkinkan layang-layang terangkat dengan baik dan mampu bertahan di udara dalam waktu yang lama.
- ▷ Prinsip kekongruenan pada segitiga memberikan kestabilan dalam struktur layang-layang. Apabila kedua segitiga yang membentuk rangka memiliki ukuran yang sama, maka pusat gravitasi akan berada tepat di tengah. Keadaan ini membuat layang-layang tidak mudah berputar atau jatuh secara tiba-tiba ketika terkena tiupan angin. Sebaliknya, apabila terjadi perbedaan ukuran pada segitiga, layang-layang akan cenderung bergerak miring atau tidak stabil. Oleh karena itu, menjaga kesamaan bentuk pada segitiga menjadi faktor utama keberhasilan penerbangan layang-layang.
- ▷ Selain memberikan kestabilan, penggunaan segitiga kongruen pada layang-layang juga memengaruhi arah gerakan dan kelincahan saat dimainkan. Layang-layang yang dibuat dengan simetri sempurna dapat lebih mudah dikendalikan, baik untuk terbang lurus ke atas maupun melakukan manuver tertentu. Desain ini memungkinkan layang-layang bertahan dalam kondisi angin yang bervariasi, sehingga permainan menjadi lebih menarik dan menantang. Dengan demikian, segitiga kongruen bukan hanya elemen teoritis dalam matematika, tetapi juga bagian penting yang menentukan kualitas layang-layang ketika diterbangkan.



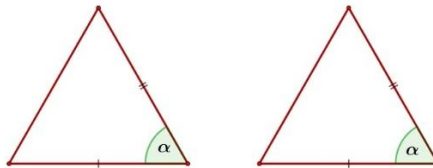
Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan segitiga kongruen diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang pengertian, penyelesaian, dan penerapan kekongruenan pada segitiga. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

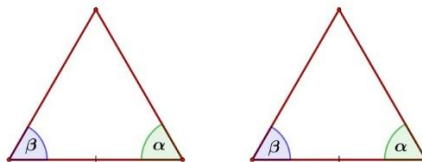
- 1) Dua segitiga disebut kongruen jika salah satu segitiga digeser, dicerminkan, diputar, atau kombinasi ketiganya sehingga dapat tepat sama atau berimpit dengan segitiga kedua. Dengan demikian, dua segitiga adalah kongruen jika ketiga sisi segitiga pertama sama panjang dengan ketiga sisi segitiga kedua, dan ketiga sudut segitiga pertama sama besar dengan ketiga sudut segitiga yang lain.
- 2) Untuk melihat dua segitiga kongruen tak perlu menggunakan definisi, tetapi cukup diselidiki salah satu dari syarat berikut.
 - ▷ Kedua segitiga mempunyai tiga pasang sisi yang sama panjang (syarat: sisi-sisi-sisi/SSS).



- ▷ Suatu segitiga mempunyai dua sisi yang masing-masing sama panjang dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang diapit kedua sisi tersebut sama besar. (syarat: sisi-sudut-sisi/SAS).



- ▷ Kedua segitiga mempunyai satu sisi yang sama panjang dan sudut pada sisi tersebut pada masing-masing segitiga sama besar. (syarat: sudut-sisi-sudut/ASA).

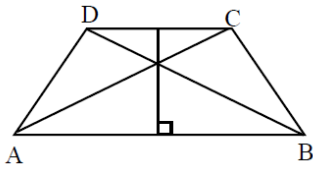


Syarat dua sudut pada alas dapat diganti dengan sudut lain. Oleh karena jumlah sudut dalam segitiga selalu 180° , syarat ini sama saja dengan syarat dua sudut di alas.

Syarat kedua segitiga mempunyai dua pasang sisi yang sama panjang dan sembarang satu sudut dapat digunakan, jika ditambahkan syarat kedua segitiga lancip atau kedua segitiga tumpul.

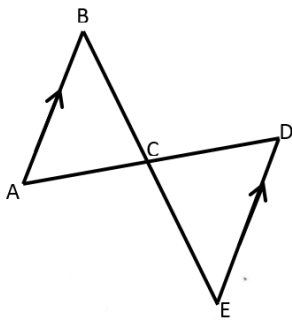
Latihan Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



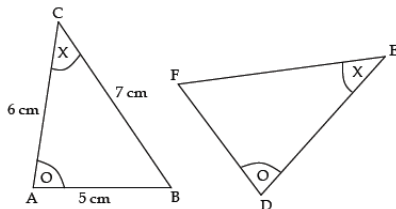
ABCD merupakan trapesium sama kaki. Banyak pasangan segitiga kongruen pada gambar tersebut adalah ...

- a. 4 pasang
b. 5 pasang
c. 6 pasang
d. 7 pasang
2. Dua segitiga pada gambar di bawah adalah kongruen.



Pasangan sisi yang sama panjang adalah ...

- a. AB dan EC
b. AD dan BE
c. AC dan CD
d. BC dan CD
3. Pada gambar di bawah, segitiga ABC kongruen dengan segitiga DEF. Panjang EF adalah ...

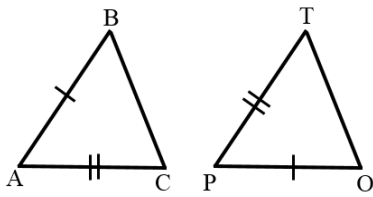


- a. 5 cm
b. 6 cm
c. 6,5 cm
d. 7 cm
4. Pada $\triangle ABC$, diketahui besar $\angle A = 60^\circ$ dan besar $\angle B = 55^\circ$, sedangkan pada $\triangle DEF$ diketahui besar $\angle D = 60^\circ$ dan besar $\angle E = 65^\circ$. Jika $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ kongruen, maka dari pernyataan berikut:
- 1) $AC=DE$
2) $AB=FE$
3) $BC=FE$
4) $BC=DE$

yang benar adalah ...

- a. 1 dan 3
b. 2 dan 3
c. 1 dan 4
d. 3 dan 4

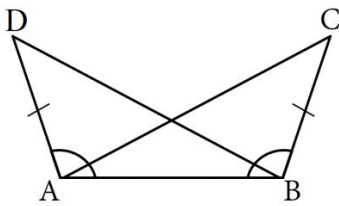
5. Perhatikan gambar berikut.



Segitiga ABC kongruen dengan segitiga POT. Pasangan sudut yang sama besar adalah ...

- a. BAC dan POT
 b. BAC dan PTO
 c. ABC dan POT
 d. ABC dan PTO

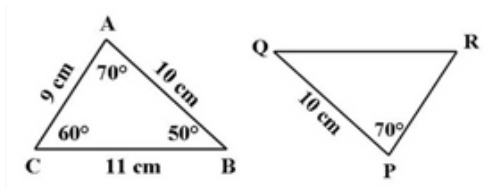
6. Perhatikan gambar berikut.



Segitiga ABD kongruen dengan segitiga BAC karena memenuhi syarat ...

- a. sisi, sudut, sisi
 b. sisi, sisi, sisi
 c. sisi, sisi, sudut
 d. sudut, sudut, sisi

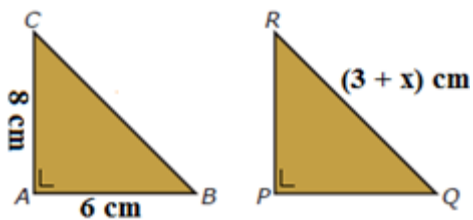
7. Perhatikan gambar berikut.



Segitiga ABC dan PQR di atas merupakan segitiga kongruen, panjang QR adalah ...

- a. 9 cm
 b. 10 cm
 c. 11 cm
 d. 12 cm

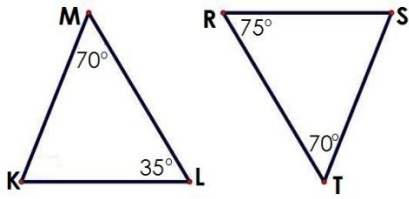
8. Perhatikan dua gambar segitiga berikut.



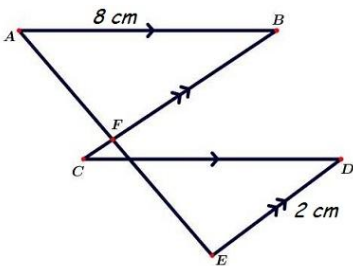
Nilai x yang memenuhi agar segitiga siku-siku ABC kongruen dengan segitiga siku-siku PQR adalah ...

- a. 6 cm
 b. 7 cm
 c. 9 cm
 d. 10 cm

9. Pada gambar berikut, segitiga KLM kongruen dengan segitiga RST. Pernyataan yang sama panjang adalah



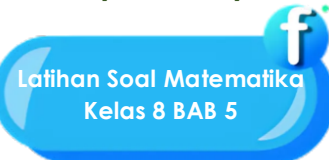
- a. $KL = ST$
 b. $LM = RS$
 c. $KM = RT$
 d. $KL = RT$
10. Perhatikan gambar berikut.



Jika $AB = BC = CD$, maka panjang BF adalah ...

- a. 4 cm
 b. 4,5 cm
 c. 5 cm
 d. 5,5 cm

**Akses latihan soal
lainnya di sini yuk!**



Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Mihova, V., & Ninova, J. 2014. On a generalization of criteria A and D for congruence of triangles. arXiv preprint arXiv:1401.5905.
- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. (2014). *Matematika untuk SMP/MTs Kelas VII*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Dewiyani, K. S. S. 2023. *Kesebangunan Dua Segitiga*. Scribd.
- Savoie, D. 2009. *Sundials: Design, Construction, and Use*. Springer Praxis Books.
- Bertamini, M. 2017. The Ponzo illusion. In *Visual illusions: A cognitive neuroscience approach* (pp. 65-80). Springer.
- Putra, A. F. S. 2021. Struktur kristal dan sifat magnetoresistance single crystal LiMn_2O_4 . *Jurnal Teknik Mesin*, 10(2), 1–10.
- Jannah, E. U. 2019. Sundial: Sejarah dan konsep aplikasinya. *Al-Marshad: Jurnal Ilmiah Pendidikan Agama Islam*, 2(1), 1–10.



BAB 6

KEKONGRUENAN PADA SEGI EMPAT

Karakter Pelajar Pancasila

Bernalar Kritis: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan kekongruenan segi empat.

Kreatif: Mampu mencari solusi permasalahan yang berkaitan dengan kekongruenan.

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Segi Empat dan Sifat Kongruensi

1. Memahami syarat-syarat kekongruenan pada segi empat.

- ▷ Menjelaskan pengertian dan konsep kekongruenan segi empat.
- ▷ Mengidentifikasi setiap syarat kekongruenan pada segi empat.

2. Membuktikan dua bangun segi empat kongruen.

- ▷ Menyajikan dua bangun segi empat kongruen.
- ▷ Mengidentifikasi dua bangun segi empat kongruen.

Kata Kunci: Jajargenjang, Kongruen, Pencermianan, Pergeseran, Perputaran, Segi Empat, Segi Empat Istimewa, Trapesium.

3. Menentukan ciri-ciri bangun segi empat istimewa.

- ▷ Menjelaskan ciri-ciri bangun segi empat istimewa berupa trapesium dan jajar genjang.
- ▷ Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bangun segi empat istimewa.



F I T R I



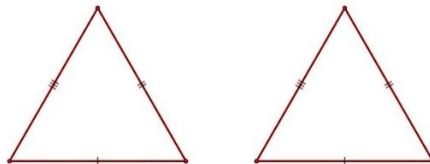
1. Kongruensi Segitiga Siku-Siku



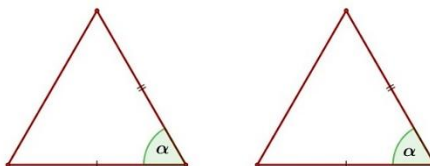
Marka Jalan Berbentuk Segitiga – Olx.co.id

Dua segitiga sebarang dikatakan kongruen (tepat sama) apabila memenuhi salah satu dari syarat berikut.

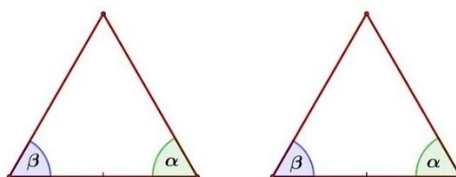
- 1) Ketiga sisi di segitiga pertama, masing-masing mempunyai ukuran sama dengan ketiga sisi di segitiga kedua. Syarat ini biasa disebut syarat SSS (sisi, sisi, dan sisi).



- 2) Pada segitiga pertama, dua sisi dan sudut yang terletak di antara kedua sisi tersebut memiliki ukuran yang sama dengan dua sisi dan sudut yang terletak di antara kedua sisi pada segitiga kedua. Syarat ini dikenal dengan sebutan syarat SAS (Sisi, Sudut, dan Sisi). Penting untuk diperhatikan bahwa syarat ini tidak hanya berlaku untuk sudut yang diapit, tetapi juga dapat diterapkan pada segitiga lancip atau tumpul.



- 3) Pada segitiga pertama, satu sisi dan dua sudut memiliki ukuran yang sama dengan satu sisi dan dua sudut yang posisinya serupa di segitiga kedua. Syarat ini disebut dengan syarat ASA (Sudut, Sisi, dan Sudut). Karena jumlah ketiga sudut dalam segitiga selalu 180° , maka dua sudut tersebut dapat dipertukarkan posisinya.

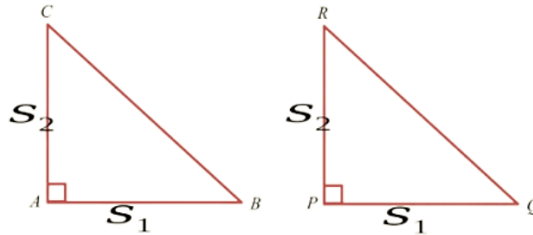


Syarat Kekongruenan Segitiga Siku-siku

Terdapat dua segitiga siku-siku, yang berarti kedua segitiga tersebut sudah memiliki satu sudut dengan ukuran yang identik. Untuk mengujinya, dapat menggunakan syarat SAS atau ASA. Mengingat satu sudut sudah diketahui sama, kedua syarat kekongruenan tersebut bisa disesuaikan dengan dua syarat berikut ini.

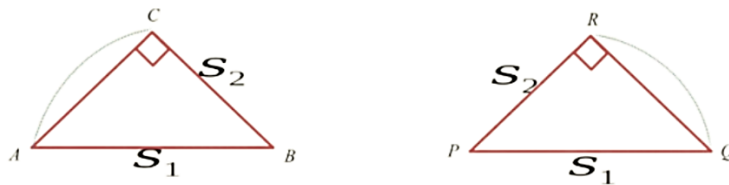
a. Kekongruenan Segitiga Siku-siku dengan Syarat SAS

- 1) Dua sisi tegak pada segitiga ABC masing-masing memiliki panjang yang sama dengan dua sisi tegak pada segitiga PQR. Sedangkan satu sudut yang sama, yaitu sudut siku-siku, diganti.



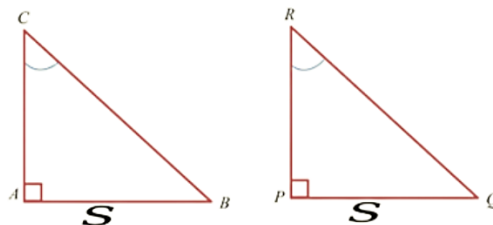
Dengan demikian, $AB = PQ$ dan $AC = PR$.

- 2) Satu sisi miring dan satu sisi tegak pada segitiga ABC memiliki panjang yang sama dengan satu sisi miring dan satu sisi tegak pada segitiga PQR. Pada kasus ini, sudut siku-siku yang sama sudah diketahui.

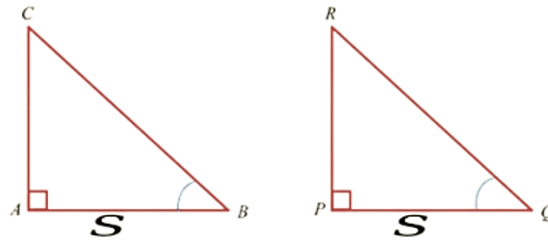


b. Kekongruenan Segitiga Siku-siku dengan Syarat ASA

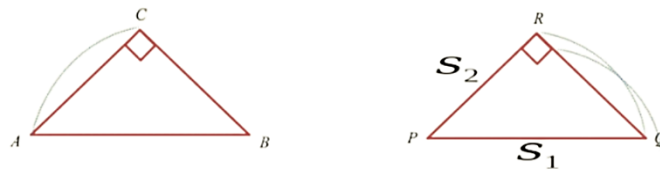
- 1) Satu sisi tegak dan satu sudut lancip pada segitiga ABC memiliki ukuran yang sama dengan sisi tegak dan sudut lancip pada segitiga PQR. Perlu diingat bahwa pada kedua segitiga, terdapat satu sudut yang identik, yaitu sudut siku-siku.



- 2) Satu sisi tegak dan sudut lancip yang terletak di depan sisi tersebut pada segitiga ABC, sama dengan sisi tegak dan sudut lancip yang terletak di depan sisi tersebut pada segitiga PQR. Perlu diingat, bahwa kedua segitiga memiliki sudut siku-siku yang identik.



- 3) Sisi miring dan satu sudut lancip pada segitiga ABC memiliki ukuran yang sama dengan sisi miring dan sudut lancip pada segitiga PQR. Perlu diingat bahwa pada segitiga ABC dan PQR terdapat satu sudut yang sama, yaitu sudut siku-siku.



Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.

Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan $AC = BC$. Dari titik C ditarik garis CD tegak lurus terhadap AB.

- Buktikan bahwa $\triangle ADC$ kongruen dengan $\triangle BDC$.
- Buktikan bahwa $\angle A = \angle B$

Pembahasan:

- Perhatikan $\triangle ADC$ dan $\triangle BDC$ kongruen karena $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, $CD = CD$, dan $AC = BC$. Berdasarkan syarat kongruensi dua segitiga siku-siku, sisi miring dan satu sisi tegak, maka $\triangle ADC$ kongruen dengan $\triangle BDC$.
- $\triangle ADC$ terbukti kongruen dengan $\triangle BDC$. Akibatnya:
 $\angle CAD = \angle CBD$ dan $\angle ACD = \angle BCD$



Kongruensi pada Lipatan Origami

- ▷ Melipat kertas menjadi bentuk tertentu ternyata tidak hanya menghasilkan karya seni, tetapi juga menyimpan konsep matematika yang menarik. Ketika sebuah kertas berbentuk persegi dilipat tepat pada garis tegak lurus yang membagi sisi-sisinya, maka terbentuk dua bagian yang sama besar. Proses lipatan tersebut menghasilkan dua segitiga siku-siku yang memiliki panjang sisi sama serta sudut yang identik. Inilah contoh nyata bagaimana kegiatan sederhana dapat menghadirkan konsep kongruensi segitiga siku-siku dalam kehidupan sehari-hari.
- ▷ Keunikan dari lipatan origami ini terletak pada kesimetrian yang tercipta secara alami. Garis lipatan berfungsi sebagai sumbu simetri yang menjamin kedua segitiga yang terbentuk memiliki ukuran serta bentuk yang sama persis. Kondisi ini memenuhi kriteria kongruensi, baik dari sisi panjang sisi maupun besar sudut. Melalui aktivitas ini, konsep abstrak dalam matematika dapat dipahami lebih mudah karena divisualisasikan secara langsung melalui sebuah media nyata.
- ▷ Origami sebagai media pembelajaran matematika memberikan pengalaman langsung bahwa setiap lipatan selalu memiliki keterkaitan dengan prinsip geometri. Lipatan tegak lurus tidak hanya membentuk segitiga siku-siku kongruen, tetapi juga membuka peluang untuk membuat pola-pola geometri yang lebih kompleks. Dari satu lipatan sederhana, dapat dihasilkan dasar bagi bentuk bintang, burung, atau bunga yang tetap mempertahankan prinsip kongruensi di setiap bagiannya. Hal ini menjadikan origami tidak sekadar aktivitas seni, melainkan juga sarana efektif untuk mengasah pemahaman matematis secara kreatif.





2. Kongruensi pada Segi Empat



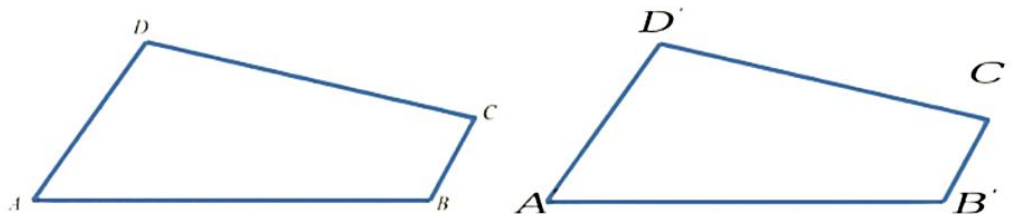
Contoh Segi Empat Kongruen – Pinterest.com

Definisi

Seperti halnya pada segitiga, dua segi empat disebut kongruen jika keduanya memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Dengan kata lain, satu segi empat dapat digeser, dicerminkan, atau diputar sehingga dapat menutupi segi empat yang lain secara tepat.

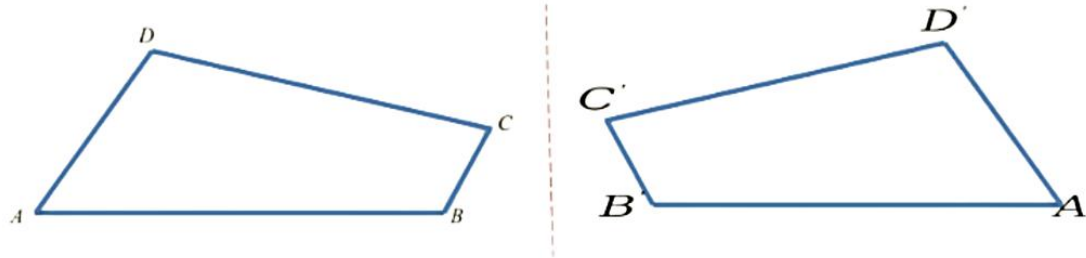
1) Pergeseran Segi Empat

Misalkan terdapat dua kertas yang berimpit dan memotongnya menjadi bentuk segi empat. Dengan menggeser salah satu segi empat tersebut ke posisi lain tanpa mengubah ukurannya, kita memperoleh dua segi empat yang kongruen, karena bentuk dan sisi-sisinya tetap sama.



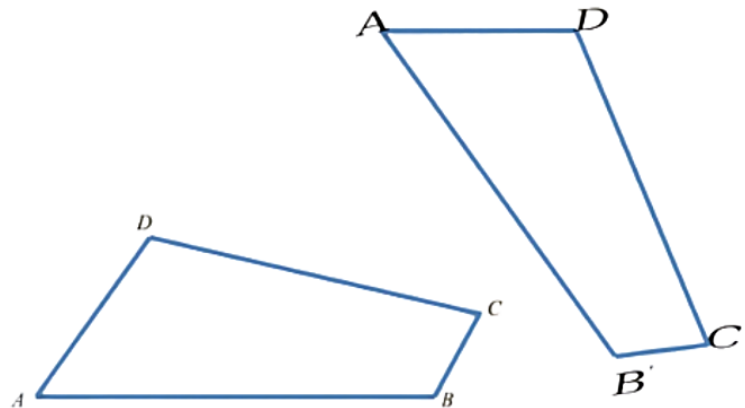
2) Pencerminan Segi Empat

Jika salah satu segi empat dipantulkan terhadap garis tertentu, misalnya garis mendatar, maka hasil pantulan akan menghasilkan dua segi empat yang kongruen. Meskipun posisinya berbeda, bentuk dan ukuran tetap sama.



3) Perputaran Segi Empat

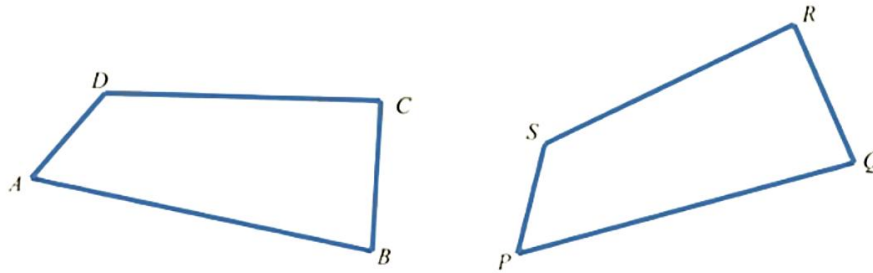
Dengan memutar salah satu segi empat pada suatu titik pusat tertentu sejauh sudut tertentu, segi empat tersebut tetap kongruen dengan segi empat aslinya. Proses rotasi ini tidak mengubah panjang sisi atau besar sudut segi empat.



Konsep Penting

Dua segi empat, misalnya ABCD dan PQRS, dikatakan kongruen jika ada pasangan titik sudut yang dapat dikaitkan sehingga:

- 1) Sudut yang bersesuaian sama besar: $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, $\angle D = \angle S$
- 2) Sisi yang bersesuaian sama panjang: $AB = PQ$, $BC = QR$, $CD = RS$, $DA = SP$



Dengan demikian, meskipun posisi segi empat berbeda, keduanya tetap memiliki ukuran dan bentuk yang sama, sehingga dapat dianggap kongruen.

Syarat-syarat kekongruenan segi empat memiliki kesamaan dengan syarat-syarat kongruensi pada segitiga. Pada segitiga, terdapat enam syarat, yaitu tiga sudut dan tiga sisi yang harus sama. Namun, beberapa syarat pada segitiga dapat disederhanakan atau diturunkan. Sebagai contoh, jika dua segitiga memiliki tiga pasang sisi yang panjangnya sama, maka kedua segitiga tersebut pasti kongruen. Tetapi hal tersebut tidak berlaku pada segi empat. Dua segi empat yang memiliki empat sisi dengan panjang yang sama belum tentu kongruen.

Jika hanya diketahui panjang keempat sisi pada dua segi empat, kita tidak dapat langsung menyimpulkan kekongruenannya. Hal ini berbeda dengan segitiga, di mana cukup dengan mengetahui panjang ketiga sisinya saja kita dapat menentukan apakah segitiga-segitiga tersebut kongruen. Untuk menentukan kekongruenan pada segi empat, kita dapat membaginya menjadi dua segitiga dan kemudian memeriksa apakah kedua segitiga tersebut kongruen dengan menggunakan syarat-syarat kongruensi segitiga yang sudah kita pelajari.

Syarat Kongruensi Segitiga yang digunakan untuk Segi Empat

1) Syarat SSS (Sisi, Sisi, dan Sisi):

Dua segitiga dikatakan kongruen jika ketiga sisi pada segitiga pertama memiliki panjang yang sama dengan tiga sisi yang bersesuaian pada segitiga kedua.

2) Syarat SAS (Sisi, Sudut, dan Sisi):

Dua segitiga dikatakan kongruen jika setiap segitiga memiliki satu sudut yang sama besar, dan sisi yang mengapit sudut pada segitiga pertama memiliki panjang yang sama dengan sisi yang mengapit sudut pada segitiga kedua.

3) Syarat ASA (Sudut, Sisi, dan Sudut):

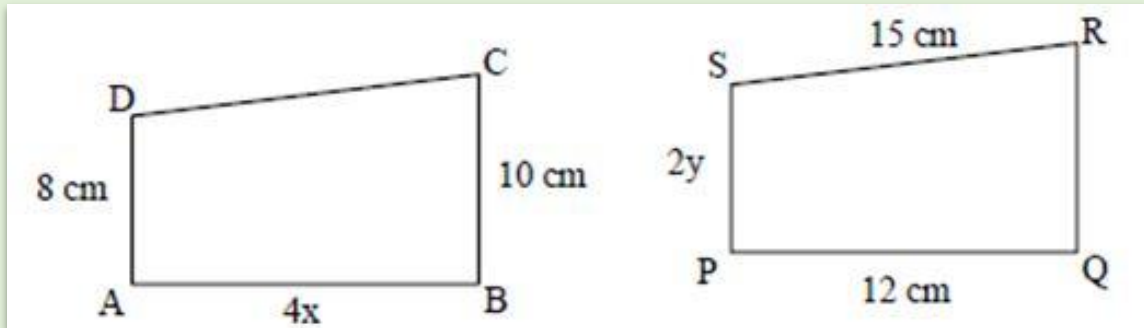
Dua segitiga dikatakan kongruen jika satu sisi pada segitiga pertama memiliki panjang yang sama dengan sisi yang bersesuaian pada segitiga kedua, dan dua sudut pada sisi tersebut di segitiga pertama sama besar dengan dua sudut yang bersesuaian di segitiga kedua.

4) Syarat Keempat:

Dua segitiga dapat dikatakan kongruen jika dua sisi pada segitiga tersebut memiliki panjang yang sama dan satu sudut yang sama besar, meskipun sudut tersebut tidak harus diapit oleh sisi-sisi yang bersesuaian. Namun, perlu diperhatikan juga apakah segitiga tersebut merupakan segitiga lancip atau tumpul.

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Tentukan nilai x jika segi empat ABCD dan segi empat PQRS merupakan dua bangun yang kongruen.

Pembahasan:

Segi empat ABCD dan segi empat PQRS merupakan dua bangun yang kongruen, maka panjang sisi yang bersesuaian sama. $AB = PQ$, sehingga:

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Jadi, nilai x adalah 3.





Rahasia Dibalik Papan Catur

- ▷ Permainan catur selalu identik dengan papan kotak-kotak berwarna hitam dan putih yang tersusun rapi. Pola papan tersebut tidak dibuat secara sembarangan, melainkan memiliki keteraturan matematis yang jelas. Setiap kotak pada papan permainan berbentuk persegi dengan ukuran yang sama, sehingga keseluruhan papan dapat dipandang sebagai susunan segi empat kongruen. Kekongruenan ini memastikan bahwa setiap kotak memiliki panjang sisi dan besar sudut yang identik, sehingga pola kotak dapat berulang secara sempurna tanpa menimbulkan celah atau tumpang tindih.
- ▷ Keteraturan bentuk kotak kongruen pada papan catur tidak hanya memberikan fungsi estetika, tetapi juga peran penting dalam jalannya permainan. Dengan adanya kotak yang seragam, pergerakan bidak catur dapat diatur secara konsisten sesuai aturan yang berlaku. Bidak dapat bergerak secara lurus, diagonal, atau melompat dengan acuan jarak yang seragam karena setiap kotak memiliki ukuran yang identik. Tanpa kekongruenan, pergerakan bidak akan menjadi tidak seimbang dan permainan kehilangan prinsip keadilannya.
- ▷ Papan catur juga mencerminkan konsep tiling dalam matematika, yaitu pengisian bidang datar menggunakan bangun kongruen tanpa celah. Susunan 64 kotak kongruen pada papan berfungsi sebagai contoh sederhana penerapan tiling dengan segi empat. Prinsip ini tidak hanya muncul dalam papan catur, tetapi juga terlihat pada desain lantai, keramik, hingga pola mozaik arsitektur. Dengan demikian, papan catur bukan hanya arena permainan strategi, melainkan juga representasi nyata dari keteraturan geometri yang dapat diamati dalam kehidupan sehari-hari.





3. Kongruensi Segi Empat Istimewa



Marka Jalan Berbentuk Segitiga – Olx.co.id



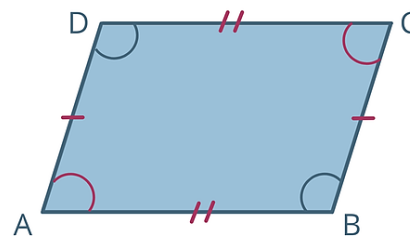
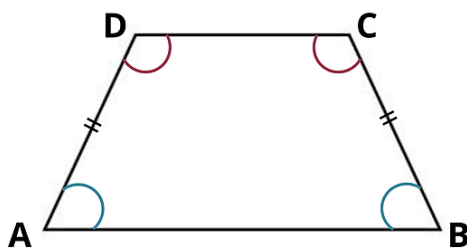
Terdapat beberapa jenis segi empat yang memiliki sifat istimewa, yang dapat dikenali berdasarkan sisi-sisinya. Beberapa di antaranya adalah:

1. Trapesium

Segi empat yang memiliki sepasang sisi yang sejajar disebut sebagai trapesium. Ciri khas trapesium adalah hanya satu pasang sisi yang sejajar, sementara sisi-sisi lainnya tidak.

2. Jajargenjang

Segi empat dengan dua pasang sisi yang sejajar disebut sebagai jajargenjang. Pada jajargenjang, sisi-sisi yang berhadapan memiliki panjang yang sama dan sejajar satu sama lain.

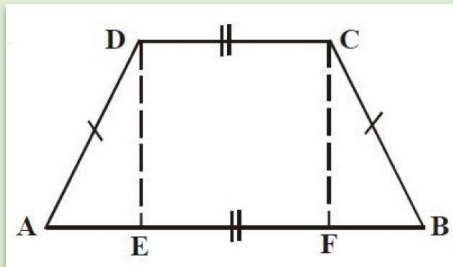


Contoh Soal

Diketahui trapesium sama kaki ABCD, dengan AB sejajar dengan DC dan $AD = BC$. Buktikan bahwa panjang $AC = BD$.

Pembahasan:

Gambarkan trapesium sama kaki ABCD dan panjang $AC = BD$, sebagai berikut.



Perhatikan bahwa $\triangle AED$ kongruen dengan $\triangle BFC$ karena:

$AD = BC$,

$DE = CF$, dan

$\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$

Jadi, $\angle DAE = \angle BFC$. Demikian juga, $\angle ADE = \angle BCF$ karena kesejajaran garis AB dan DC sehingga:

$\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ dan

$\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$

Perhatikan $\triangle ABD$ dan $\triangle BAC$, oleh karena:

$\angle B = \angle A$

$AB = AB$, dan

$AD = BC$

Sehingga $\triangle ABD$ kongruen dengan $\triangle BAC$, sehingga $BD = AC$.

Jajar genjang merupakan segi empat yang memiliki salah satu ciri sebagai berikut.

- 1) Dua pasang sisi sejajar.
- 2) Setiap sisi berhadapan sama panjang.
- 3) Terdapat satu sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang.
- 4) Diagonal saling membagi sama panjang.

Apabila membuat suatu segi empat dengan salah satu cara di atas, maka segi empat yang terbentuk memiliki keempat sifat tersebut.



Pojok Matematika

Perpaduan Geometri pada Ventilasi Rumah

- ▷ Ventilasi rumah sering kali menampilkan pola kisi-kisi yang tersusun rapi dan berulang, sehingga membentuk susunan segi empat dengan ukuran identik. Pola tersebut bukan sekadar elemen dekoratif, melainkan memiliki dasar matematis yang kuat. Setiap segi empat yang kongruen memastikan bahwa celah pada kisi-kisi memiliki ukuran sama, sehingga aliran udara dapat tersebar merata ke seluruh ruangan. Keteraturan ini menunjukkan bahwa prinsip kongruensi memiliki peran penting dalam menciptakan kenyamanan lingkungan hunian.
- ▷ Penggunaan segi empat kongruen pada kisi-kisi juga berfungsi untuk menjaga keseimbangan antara estetika dan fungsi. Dengan bentuk yang sama pada setiap celah, desain kisi-kisi terlihat lebih harmonis dan simetris. Selain itu, keseragaman ukuran celah mempermudah perhitungan jumlah bukaan yang diperlukan sesuai kebutuhan sirkulasi udara. Hal ini membuktikan bahwa kongruensi tidak hanya berkaitan dengan teori matematika, tetapi juga memiliki implikasi praktis dalam bidang arsitektur dan desain bangunan.
- ▷ Keberadaan pola segi empat kongruen dalam kisi-kisi ventilasi memberikan contoh nyata bagaimana konsep geometri diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Setiap pengulangan bentuk yang identik tidak hanya memperkuat struktur, tetapi juga menjaga konsistensi fungsi. Kombinasi antara keserasian visual dan efisiensi sirkulasi udara menjadikan kisi-kisi ventilasi rumah sebagai representasi sederhana dari penerapan prinsip kongruensi segi empat dalam konteks arsitektur modern.

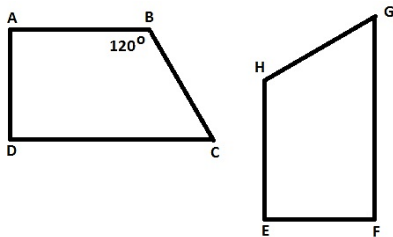


Rangkuman

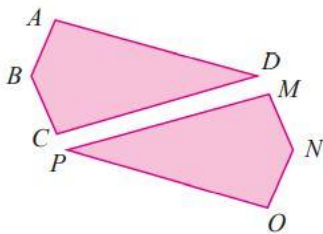
Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan segitiga kongruen diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang pengertian, penyelesaian, dan penerapan kekongruenan pada segi empat. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

- 1) Dua segi empat disebut kongruen jika dua segi empat mempunyai bentuk dan ukuran yang sama.
- 2) Dua segi empat dikatakan kongruen jika kita mengaitkan titik sudut di segi empat pertama dan titik sudut di segi empat kedua, sudut-sudut yang dikaitkan sama besar, dan sisi-sisi yang berkaitan sama besar.
- 3) Syarat-syarat segitiga kongruen sebagai berikut.
 - ▷ Dua segitiga kongruen jika ketiga sisipada segitiga pertama sama dengan tiga sisi yang berkaitan dengan segitiga kedua. Syarat SSS (Sisi, Sisi, dan sisi).
 - ▷ Dua segitiga kongruen jika setiap segitiga mempunyai satu sudut yang sama besar dan sisi yang mengapit sudut pada segitiga pertamasama dengan sisi yang mengapit sudut di segitiga kedua. Syarat SAS (sisi, sudut, dan sisi).
 - ▷ Dua segitiga kongruen jika setiap segitiga mempunyai satusisi sama besar, serta dua sudut di sisi pada segitiga pertama akan sama dengan dua sudut di sisi pada segitiga kedua. Syarat ASA (sudut, sisi, dan sudut).
 - ▷ Ada syarat keempat,yaitu dua sisi sama dan satu sudut sama, tidak harus diapit, tetapi perlu ditambah apakah segitiga tersebut lancipatau tumpul.
- 4) Terdapat beberapa segi empat istimewa, misalkan dilihat sisi-sisi dari segi empat tersebut, yaitu:
 - ▷ segi empat dengan sepasang sisi sejajar disebut trapesium,
 - ▷ segi empat dengan dua pasang sisi sejajar disebut jajargenjang.

- a. 5 cm
b. 6 cm
- c. 8 cm
d. 7 cm
4. Perhatikan pernyataan berikut.
- (1) Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar
(2) Sudut-sudut yang bersesuaian jumlahnya 180 derajat
(3) Sisi-sisi yang bersesuaian sebanding
(4) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang
- Syarat dua bangun kongruen adalah ...
- a. 1 dan 3
b. 2 dan 3
c. 1 dan 4
d. 3 dan 4
5. Diketahui segiempat ABCD dan MONP kongruen. Sisi AB bersesuaian dengan sisi MO dan sisi AD bersesuaian dengan sisi MP. Pernyataan berikut benar, *kecuali* ...
- a. Sudut A = Sudut M
b. Sudut B = Sudut N
c. Sudut C = Sudut N
d. Sudut D = Sudut P
6. Perhatikan gambar berikut.

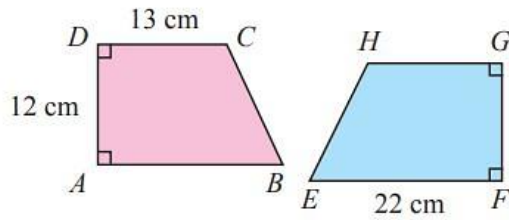


- Diketahui bangun ABCD kongruen dengan EFGH. $\angle A = \angle D = 90^\circ$. Besar sudut G adalah ... $^\circ$
- a. 30
b. 40
c. 50
d. 60
7. Perhatikan gambar berikut.



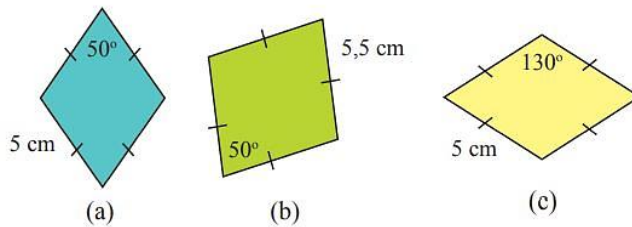
- Segiempat ABCD kongruen dengan segiempat PONM. Pasangan sisi yang bersesuaian adalah ...
- a. AB dan MN
b. AD dan MP
c. BC dan MN
d. CD dan OP

8. Perhatikan segitiga berikut.



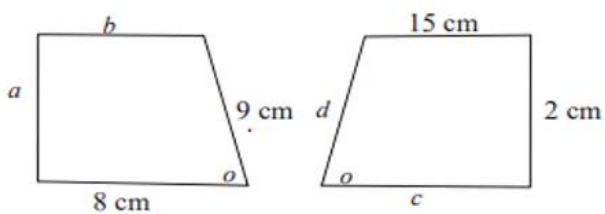
Trapezium ABCD kongruen dengan trapezium EFGH. Panjang sisi GH adalah ...

- a. 12 cm
 - b. 13 cm
 - c. 22 cm
 - d. 25 cm
9. Perhatikan gambar berikut.



Pasangan belah ketupat yang kongruen adalah

- a. a dan b
 - b. a dan c
 - c. b dan c
 - d. tidak ada yang kongruen
10. Perhatikan gambar berikut.



Berdasarkan gambar trapezium di atas, nilai $a + b + c + d = \dots$

- a. 28 cm
- b. 34 cm
- c. 22 cm
- d. 40 cm

Akses latihan soal
lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika
Kelas 8 BAB 6

Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Laudano, F. 2017. Congruence theorems for quadrilaterals. *Journal of Geometry and Graphics*, 21(1).
- Kunz, C. 2024. *Mathematics of origami*. *Bachelor Thesis*, ETH Zürich.
- Sari, D. 2023. Pengaruh pembelajaran origami terhadap pemahaman konsep geometri siswa SMP. *Jurnal Pendidikan Matematika Indonesia*, 8(1), 45–52.
- Peng, C.-H., Jiang, C., Wonka, P., & Pottmann, H. 2019. Checkerboard patterns with black rectangles. *ACM Transactions on Graphics*, 38(4), Article 1.
- Pratama, R. 2023. Analisis desain ventilasi alami pada rumah tinggal di iklim tropis. *Jurnal Arsitektur Indonesia*, 18(1), 25–34.
- Conzatti, A., & Sudirman, M. 2025. Are simple models for natural ventilation suitable for shelter design? *Buildings and Cities*, 6, Article 497.



BAB 7

TEORI PELUANG

Karakter Pelajar Pancasila

Bernalar Kritis: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan teori peluang.

Kreatif: Mampu menganalisis dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan teori peluang.

Kata Kunci: Frekuensi Harapan, Frekuensi Relatif, Kejadian, Peluang, Peluang Gabungan, Percobaan, Ruang Sampel, Titik Sampel.

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Matematika dengan Peluang

1. Menentukan titik sampel (kejadian yang mungkin terjadi) suatu percobaan.

- ▷ Memprediksi kemungkinan terjadinya suatu kejadian (titik sampel) pada suatu percobaan sederhana menggunakan konsep peluang.
- ▷ Menentukan kejadian yang pasti atau mustahil terjadi pada suatu percobaan.

2. Menentukan frekuensi harapan dari suatu kejadian.

- ▷ Memahami pengertian frekuensi harapan (banyak kejadian) dalam beberapa kali percobaan.
- ▷ Menghitung frekuensi harapan jika diketahui jumlah percobaan.

3. Menentukan peluang berdasarkan informasi statistika.

- ▷ Mengidentifikasi informasi statistika yang disajikan.
- ▷ Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan informasi statistika.

4. Menentukan frekuensi relatif dan peluang suatu kejadian berdasarkan suatu percobaan.

- ▷ Memahami frekuensi relatif suatu kejadian berdasarkan suatu kejadian berdasarkan suatu percobaan yang telah dilakukan.
- ▷ Menentukan nilai peluang dari dua kejadian gabungan.



F I T R I



1. Percobaan dan Ruang Sampel

Apabila satu uang logam dilempar undi dan uang logam tersebut "fair", artinya salah satu muka tidak lebih berat dari muka yang lainnya, maka tidak dapat diketahui sisi mana yang muncul. Hasil akan diketahui setelah melakukan percobaan, artinya benar-benar melakukan pelemparan undi. Keadaan seperti ini dinamakan kejadian acak.

Akan tetapi, semua kemungkinan hasil yang akan terjadi diketahui. Dalam hal ini, munculnya sisi gambar atau sisi angka. Himpunan dari semua kemungkinan yang muncul dinamakan ruang sampel.



Koin Tampak Depan dan Belakang – IDXchannel.com

Untuk singkatnya, ditulis:

Ruang sampel = {gambar, angka}

Secara sederhana, ruang sampel untuk percobaan dengan dua hasil tersebut dapat ditulis sebagai:

Ruang sampel = {G, A}

dengan G = gambar dan A = angka.

Anggota dari ruang sampel disebut titik sampel. Sementara itu, subhimpunan dari ruang sampel disebut kejadian. Kejadian yang hanya memiliki 1 titik sampel dinamakan kejadian sederhana. Dalam kasus ini, kejadian sederhananya adalah:

{A} atau {G}

Contoh Soal

Misalkan dilambungkan sekeping koin dan menggerakkan sebuah pemutar (*spinner*) yang memiliki tiga warna: merah, hijau, dan biru secara sekaligus.

- Tentukan ruang sampel dari hasil pelambungan koin.
- Tentukan ruang sampel dari hasil pergerakan pemutar

Pembahasan:

- Ruang sampel dari pelambungan sekeping koin (memiliki 2 sisi: angka dan gambar) adalah {A, G}.
- Ruang sampel dari pemutar dengan 3 warna, yaitu merah, hijau, dan biru adalah {merah, hijau, biru}.



Koin Pertama di Dunia

- ▷ Sejarah mencatat bahwa koin pertama kali digunakan sekitar abad ke-7 sebelum masehi di wilayah Lydia, yang kini termasuk bagian dari Turki modern. Koin-koin awal tersebut dibuat dari campuran emas dan perak yang disebut electrum, lalu dicetak dengan cap resmi sebagai penanda keaslian dan nilai. Bentuknya yang bulat tidak hanya memudahkan dalam pertukaran ekonomi, tetapi juga memberikan keseimbangan pada saat dilempar, sehingga memiliki kemungkinan yang hampir sama untuk jatuh pada salah satu sisi. Ciri inilah yang kelak menjadikan koin sebagai alat yang ideal untuk menentukan hasil secara acak. Seiring berjalannya waktu, kegiatan melempar koin berkembang dari sekadar kebiasaan ekonomi menjadi simbol dalam mengambil keputusan tanpa keberpihakan.
- ▷ Dalam berbagai kebudayaan, mengundi dengan uang logam dijadikan sarana untuk memastikan keadilan dan menghindari pertentangan. Ketika dua pilihan tampak sama kuatnya, lemparan koin dijadikan penentu akhir yang diterima oleh kedua pihak karena peluang yang dihasilkan bersifat seimbang. Keseimbangan peluang antara dua sisi menunjukkan penerapan konsep ruang sampel yang sederhana, di mana setiap kemungkinan memiliki peluang yang sama besar untuk terjadi. Tradisi ini tidak hanya merepresentasikan tindakan acak, tetapi juga mencerminkan nilai sosial bahwa keputusan adil dapat lahir dari proses yang transparan dan dapat diterima bersama.
- ▷ Penggunaan koin sebagai alat undian menunjukkan keterkaitan antara kebudayaan, sejarah, dan matematika. Proses "mengundi" merepresentasikan keadilan melalui peluang yang seimbang, tanpa campur tangan kehendak individu. Melalui cara ini, masyarakat belajar bahwa keputusan dapat diambil dengan dasar probabilitas yang rasional. Simbolisme koin dalam konteks tersebut memperlihatkan bagaimana konsep keacakan dapat menjadi bagian penting dalam menjaga keadilan dan keseimbangan dalam pengambilan keputusan.





2. Peluang

Diketahui suatu kejadian yang dikaitkan dengan suatu bilangan sehingga informasi ini mudah disimpan. Bilangan ini dipilih dari 0 sampai dengan 1. Bilangan 0 untuk menyatakan kejadian yang tidak mungkin terjadi dan 1 untuk menyatakan kejadian yang pasti terjadi. Sementara itu, kejadian yang lain bernilai antara 0 dan 1.

Mengundi Uang Logam

Jika sekeping uang logam dilempar undi dan uang logam tersebut "fair", artinya kedua sisi memiliki peluang yang sama untuk muncul.



Jika ditulis:

$P(\{G\})$ adalah peluang munculnya sisi gambar dan

$P(\{A\})$ adalah peluang munculnya sisi angka.

Maka $P(\{G\}) = P(\{A\})$.

Oleh karena hal ini merupakan semua kemungkinan, gunakan angka satu untuk menyatakan peluang keseluruhan kemungkinan hasil.

$$P(\{G\}) + P(\{G\}) = 1$$

Dengan demikian, disimpulkan bahwa:

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2} \text{ dan } P(\{A\}) = \frac{1}{2}$$

Untuk kejadian lainnya, dengan ruang sampel terdiri atas dua kemungkinan $\{M, B\}$. Setiap kemungkinan memiliki peluang yang sama, maka secara sederhana peluang kejadiannya adalah:

$$P(\{M\}) = P(\{B\}) = \frac{1}{2}$$

Mengundi Dadu



Sebuah Dadu – Freepik.com

Apabila satu dadu dilempar undi, ruang sampelnya adalah:

Ruang sampel = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Apabila dadu tersebut "fair", artinya tidak terdapat kecenderungan keluar yang lebih besar pada suatu muka dari muka yang lain, maka setiap sisi peluang memiliki peluang yang sama, yaitu:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$$

Oleh karena peluang keseluruhan kemungkinan hasil dinyatakan oleh angka satu, maka:

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

Maka dapat disimpulkan:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Contoh Soal

Dalam suatu kantong terdapat 30 kelereng putih, 18 kelereng biru, dan 32 kelereng merah. Jika dari dalam kantong tersebut diambil satu kelereng secara acak, tentukan peluang terambil kelereng merah.

Pembahasan:

Misalkan M menyatakan kejadian terambilnya kelereng merah dalam kantong itu. Banyaknya kelereng merah dalam kantong itu adalah 32 butir. Sementara itu, banyak seluruh kelereng adalah $30 + 18 + 32 = 80$ butir. Sehingga:

$$P(M) = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$

Jadi, peluang terambilnya sebutir kelereng merah adalah $\frac{2}{5}$.

Kejadian dengan Peluang Tak Sama

Apabila diketahui suatu kejadian A dengan ruang sampel S, maka secara umum peluang kejadian A dinyatakan dengan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{banyak cara terjadinya kejadian A}}{\text{banyak semua kemungkinan}}$$

Contoh Soal

Di suatu kelas akan dipilih seorang ketua kelas dan wakil ketua kelas. Kelas tersebut terdiri dari 16 siswa laki-laki dan 24 siswa perempuan. Tentukan peluang terpilihnya ketua kelas perempuan.

Pembahasan:

Misalkan A adalah kejadian terpilihnya ketua kelas perempuan, dengan $n(A) = 24$ dan $n(S) = 40$ sehingga $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$.

Jadi, peluang terpilihnya ketua kelas perempuan adalah $\frac{3}{5}$.

Peluang Dua Percobaan

Jika dua uang logam dilempar undi, akan diperoleh kejadian seperti munculnya 2 angka, 1 angka dan 1 gambar, dan 2 gambar. Ruang sampel dari kejadian ini dapat dicari dengan menggunakan tabel seperti berikut.

	G	A
G	(G, G)	(G, A)
A	(A, G)	(A, A)

Berdasarkan cara di atas, diperoleh:

Ruang sampel = $\{(G, G), (G, A), (A, G), (A, A)\}$

Oleh karena G dan A memiliki peluang muncul yang sama, maka peluang setiap kejadian sederhananya sama.

$$P(\{(G, G)\}) = P(\{(G, A)\}) = P(\{(A, G)\}) = P(\{(A, A)\}) = \frac{1}{4}$$

Contoh Soal

Dua buah dadu dilambungkan bersamaan. Tentukan peluang mata dadu yang muncul berjumlah 4.

Pembahasan:

Misalkan A adalah kejadian munculnya mata dadu berjumlah 4 sehingga

$$A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \text{ dengan } n(A) = 3$$

Banyaknya anggota ruang sampel untuk 2 dadu yang masing-masingnya memiliki 6 sisi adalah $6 \times 6 = 36$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Jadi, peluang munculnya mata dadu berjumlah 4 adalah $\frac{1}{12}$.

Kepastian dan Kemustahilan

Diketahui sebuah kantong berisi 5 bola merah. Kemudian diambil satu bola.

- 1) Setiap kali mengambil satu bola, hanya akan mendapatkan bola merah. Hal ini artinya bahwa peluang untuk memperoleh bola merah adalah 1 (disebut suatu kepastian).
- 2) Di dalam kantong tidak terdapat bola hitam, maka peluang diperoleh bola hitam adalah 0 (disebut suatu kemustahilan).

Secara matematis, kisaran nilai peluang dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 0 &\leq n(A) \leq n(S) \\ \frac{0}{n(S)} &\leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \\ 0 &\leq P(A) \leq 1 \end{aligned}$$

Nilai peluang kejadian A saat $P(A) = 0$ menunjukkan bahwa suatu kejadian tidak akan pernah terjadi, sedangkan nilai peluang kejadian A saat $P(A) = 1$ menunjukkan bahwa suatu kejadian pasti akan terjadi. Suatu kejadian akan semakin mudah terjadi apabila besar peluangnya mendekati satu. Sebaliknya, akan semakin sulit terjadi apabila besar peluangnya mendekati nol.



3. Frekuensi Harapan



Ilustrasi Peluang Pemenang dalam Undian – Pinterest.com

Dalam sebuah percobaan, frekuensi harapan dihitung dengan mengalikan peluang suatu kejadian dengan jumlah pengulangan percobaan. Jika A adalah suatu kejadian dalam ruang sampel S dan $P(A)$ merupakan peluang terjadinya A dalam n kali percobaan, maka frekuensi harapan kejadian E didefinisikan:

$$F(A) = P(A) \times n$$

Dalam beberapa hal, frekuensi harapan menentukan peluang suatu kejadian.

Contoh Soal

Sebuah dadu dilemparkan sebanyak 90 kali, tentukan frekuensi harapan muncul mata dadu berjumlah lebih dari 8.

Pembahasan:

Saat dua buah dadu dilemparkan, jumlah mata dadu yang muncul dapat berkisar antara 2 hingga 12. Untuk menghitung peluang munculnya jumlah mata dadu lebih dari 8, perlu diketahui jumlah kombinasi yang menghasilkan jumlah lebih dari 8.

Jumlah mata dadu yang lebih dari 8 adalah: 9, 10, 11, dan 12.

Kemungkinan jumlah dadu yang menghasilkan jumlah lebih dari 8. Total kombinasi pada dua dadu adalah: $n = 6 \times 6 = 36$

Kombinasi untuk jumlah lebih dari 8:

9: (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) → 4 kombinasi

10: (4,6), (5,5), (6,4) → 3 kombinasi

11: (5,6), (6,5) → 2 kombinasi

12: (6,6) → 1 kombinasi

Jumlah kombinasi yang menghasilkan jumlah lebih dari 8 adalah: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Jadi, ada 10 kombinasi yang menghasilkan jumlah mata dadu lebih dari 8.

$$P(\text{jumlah mata dadu lebih dari 8}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Jadi, frekuensi harapan = $\frac{5}{18} \times 90 = 25$ kali.

Contoh Soal

Dari seperangkat kartu bridge dilakukan pengembalian secara acak sebanyak 260 kali. Setiap kali pengambilan, kartu dikembalikan. Tentukan frekuensi harapan yang diambil adalah kartu K.

Pembahasan:

Jumlah kartu bridge adalah 52 lembar, sedangkan kartu K terdiri dari 4 lembar, yaitu K spade, K heart, K diamond, dan K club. Untuk itu, peluang terambilnya selembarnya kartu K dari 52 kartu tersebut adalah $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Frekuensi harapan terambilnya kartu K dari 260 kali pengambilan adalah

$$\text{frekuensi harapan} = \frac{1}{13} \times 260 = 20$$

Jadi, dari 260 kali pengambilan, diharapkan mendapat kartu K sebanyak 20 kali.



Pojok Matematika

Antara Mustahil dan Pasti

- ▷ Dalam kehidupan terdapat banyak peristiwa yang tampak mustahil, namun secara matematis tetap memiliki peluang untuk terjadi. Teori peluang menjelaskan bahwa kemustahilan sejati hanya terjadi ketika suatu kejadian memiliki peluang 0, sedangkan segala hal dengan peluang lebih besar dari 0 masih mungkin terjadi, walaupun sangat jarang. Secara kasat mata hal tersebut tampak mustahil, tetapi kenyataannya selalu ada individu yang berhasil menang karena peluangnya tidak nol. Konsep ini menegaskan bahwa banyak hal di dunia bukan benar-benar tidak mungkin, melainkan hanya sangat kecil kemungkinannya sehingga jarang disaksikan.
- ▷ Fenomena alam menjadi bukti nyata bahwa kejadian dengan peluang kecil dapat tetap terjadi dalam kondisi tertentu. Pembentukan kristal salju yang tidak pernah identik satu sama lain, munculnya pelangi ganda setelah hujan, atau peristiwa seseorang tersambar petir merupakan contoh kejadian yang peluangnya kecil tetapi bukan mustahil. Dalam skala yang lebih besar, peristiwa seperti tumbukan meteor di permukaan bumi juga termasuk dalam kategori kejadian berpeluang sangat kecil, namun tetap mungkin terjadi dalam rentang waktu yang panjang. Setiap fenomena tersebut berada di antara dua titik ekstrem, yaitu kemustahilan mutlak dan kepastian mutlak, sehingga memperlihatkan betapa luasnya rentang probabilitas yang dapat terjadi di alam semesta.
- ▷ Pemahaman tentang batas antara mustahil dan pasti memberikan pandangan yang rasional terhadap ketidakpastian. Dalam teori peluang, nilai 0 melambangkan kejadian yang tidak mungkin terjadi, sedangkan nilai 1 menandakan kepastian. Di antara dua nilai itu terbentang seluruh kemungkinan yang menggambarkan realitas kehidupan. Melalui konsep ini, manusia belajar untuk berpikir kritis dan mengukur risiko secara objektif, baik dalam sains, ekonomi, maupun pengambilan keputusan sehari-hari. Kesadaran bahwa setiap fenomena memiliki peluang tertentu menumbuhkan sikap ilmiah, bahwa apa yang tampak sebagai kebetulan sebenarnya adalah hasil dari sistem yang teratur dan terukur.





4. Menentukan Peluang Berdasarkan Informasi Statistika

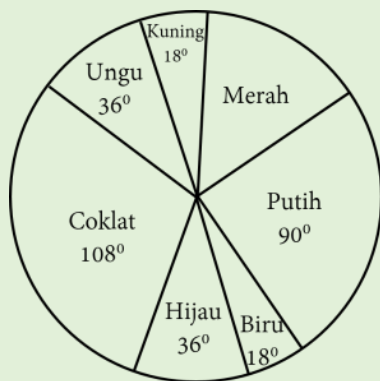


Spinner Wheel Menggunakan Konsep Peluang – Pinterest.com

Frekuensi relatif adalah jumlah dari kejadian dibandingkan kejadian secara keseluruhan.

Contoh Soal

Dalam kantong terdapat 40 permen dengan warna dan kuantitas seperti tampak pada diagram lingkaran di bawah.



Ryan mengambil sebutir permen dari kantong tanpa melihat warnanya. Tentukan peluang Ryan mengambil permen berwarna merah.

Pembahasan:

Kuantitas permen warna merah dalam satuan derajat adalah

$$360^\circ - (18 + 36 + 108 + 36 + 18 + 90)^\circ = 360^\circ - 306^\circ = 54^\circ$$

Banyaknya permen warna merah dalam kantong:

$$n(\text{merah}) = \frac{54^\circ}{360^\circ} \times 40 = 6$$

Peluang terambilnya sebutir permen warna merah:

$$P(\text{merah}) = \frac{n(\text{merah})}{n(S)} = \frac{6}{40} = 15\%$$

Jadi, peluang Ryan mengambil permen berwarna merah adalah 15%,

Contoh Soal

Sebuah survei mengambil secara acak 60 murid sebagai sampelnya. Pertanyaan yang diberikan adalah "apakah mereka membawa bekal ke sekolah?". Hasilnya, 36 siswa menjawab "Ya" sedang lainnya "Tidak". Jika survei dilakukan lagi pada 50 murid lainnya dan diperkirakan hasil survey sama proporsinya dengan survey sebelumnya, tentukan frekuensi relatif murid yang membawa bekal dari seluruh siswa yang disurvei.

Pembahasan:

Dari informasi pada soal, diketahui 6060 murid disurvei terkait membawa bekal ke sekolah atau tidak.

Hasilnya 3636 siswa menjawab "Ya" sedang lainnya "Tidak", sehingga diperoleh kesimpulan sederhana yaitu peluang murid bawa bekal ke sekolah adalah $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ sedangkan peluang tidak bawa bekal adalah $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Dengan perkiraan peluang yang sama jika survei dilakukan lagi pada 50 anak, maka kemungkinan anak-anak yang bawa bekal adalah

$$\begin{aligned} fh(A) &= n \times P(A) \\ &= 50 \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{150}{5} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Frekuensi relatif adalah perbandingan antara banyak kejadian dengan banyak percobaan. Pada kasus di atas perbandingan relatif adalah perbandingan banyak anak yang bawa bekal dengan banyak anak keseluruhan.

$$\begin{aligned} fr(A) &= \frac{30}{50} \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

Jadi, frekuensi relatif murid yang membawa bekal dari seluruh siswa yang disurvei adalah 0,6.





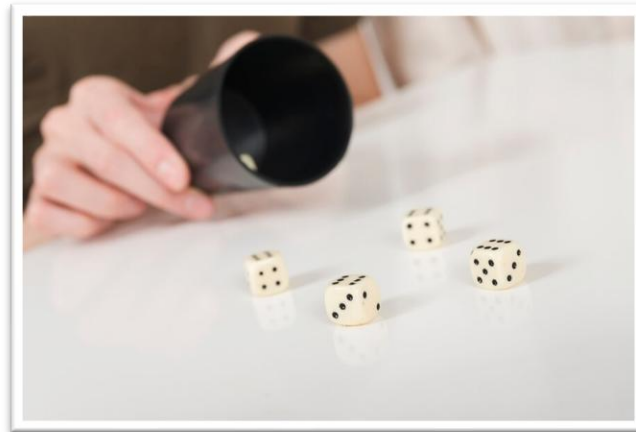
Peluang Kesembuhan dalam Medis

- ▷ Di balik setiap keputusan medis yang diambil dokter, terdapat perhitungan peluang yang didasarkan pada data dan bukti ilmiah. Dunia kesehatan modern tidak lagi bergantung pada perkiraan atau pengalaman semata, melainkan pada analisis statistik yang menunjukkan kemungkinan keberhasilan suatu tindakan. Setiap pengobatan, baik berupa terapi, operasi, maupun pemberian obat, memiliki peluang berhasil dan gagal yang dapat diukur melalui data ribuan kasus serupa. Misalnya, apabila dari 1.000 pasien yang menerima jenis pengobatan tertentu, 850 diantaranya menunjukkan perbaikan kondisi, maka peluang kesembuhan metode tersebut dapat dikatakan sebesar 85%. Pendekatan berbasis angka ini membantu dunia medis mengambil keputusan yang lebih objektif dan terukur.
- ▷ Penggunaan teori peluang dalam analisis data medis juga membuka jalan bagi munculnya pengobatan yang lebih efektif dan bersifat individual. Dengan dukungan teknologi digital dan kecerdasan buatan, data pasien dianalisis untuk memprediksi hasil pengobatan yang paling mungkin terjadi berdasarkan faktor usia, riwayat penyakit, maupun respons terhadap obat. Melalui analisis tersebut, dokter dapat menentukan strategi perawatan yang paling sesuai untuk setiap pasien. Hal ini memperlihatkan bagaimana matematika berperan langsung dalam meningkatkan kualitas hidup manusia melalui keputusan medis yang akurat dan berbasis data.
- ▷ Dalam praktik medis, peluang kesembuhan menjadi dasar penting dalam menentukan pilihan pengobatan, evaluasi efektivitas terapi, serta penilaian risiko komplikasi. Rumah sakit dan lembaga penelitian menggunakan statistik peluang untuk menilai keberhasilan vaksin, uji klinis obat baru, dan tingkat keselamatan prosedur medis tertentu. Informasi tersebut membantu dokter menyusun rekomendasi yang lebih tepat dan aman bagi pasien. Dengan memahami peluang kesembuhan secara ilmiah, tenaga medis dapat menyeimbangkan antara harapan dan kenyataan medis, memastikan bahwa setiap tindakan dilakukan berdasarkan bukti kuat, bukan perkiraan. Melalui penerapan peluang, dunia kedokteran terus bergerak menuju praktik yang lebih akurat, transparan, dan bertanggung jawab terhadap keselamatan pasien.





5. Peluang Gabungan Dua Kejadian



Pelemparan Dadu – Freepik.com

Apabila diketahui kejadian A dan B merupakan subhimpunan ruang sampel (S), maka dapat dihitung pula $n(A \cap B)$ dan $n(A \cup B)$. Untuk mengetahui peluang gabungan dua kejadian, dapat menggunakan aturan:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Apabila kedua ruas dari persamaan tersebut dibagi dengan banyak anggota ruang sampel ($n(s)$), maka diperoleh peluang gabungan dua kejadian A dan B, yaitu

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jika $A \cap B = \emptyset$, maka $P(A \cap B) = 0$ dan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh Soal

Dilan dan Milea berbelanja di toko yang sama dalam minggu yang sama selama 5 hari (Senin sampai Jumat). Mereka masing-masing memiliki peluang yang sama untuk berbelanja di toko pada 5 hari tersebut. Tentukan peluang mereka berbelanja di toko itu pada hari yang berurutan.

Pembahasan:

Perhatikan tabel berikut.

Nama \ Hari		Dilan				
		Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat
Milea	Senin					
	Selasa					
	Rabu					
	Kamis					
	Jumat					

Sel tabel yang diberi warna biru menyatakan kejadian di mana mereka berdua berbelanja di hari yang berurutan. Dari tabel di atas, terdapat 8 sel biru, sedangkan jumlah sel seluruhnya ada 25.

Jadi, peluangnya sebesar $\frac{8}{25} = 0,32$.

Contoh Soal

Dalam sebuah kotak terdapat 6 buah bohlam berwarna putih dan 12 buah bohlam berwarna kuning. Diketahui bahwa 2 di antara bohlam putih dan 3 antara bohlam kuning terbakar. Jika satu bohlam diambil secara acak dari dalam kotak, tentukan peluang untuk mendapatkan bohlam tersebut merupakan:

- bohlam putih,
- bohlam kuning,
- bohlam yang terbakar,
- bohlam putih yang terbakar,
- bohlam putih atau bohlam yang terbakar.

Pembahasan:

Jika S ruang sampel, maka $n(S) = 6 + 12 = 18$.

Kejadian $E_1 = \{\text{bohlam yang terambil berwarna putih}\}$, $n(E_1) = 6$

Kejadian $E_2 = \{\text{bohlam yang terambil berwarna kuning}\}$, $n(E_2) = 12$

Kejadian $E_3 = \{\text{bohlam yang terambil adalah terbakar}\}$, $n(E_3) = 2 + 3 = 5$

sehingga untuk $E_1 \cap E_3 = \{\text{bohlam putih yang terbakar}\} = 2$

Kejadian E_1 dan E_2 bersifat saling lepas, sehingga diperoleh:

a. $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

b. $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

c. $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{5}{18}$

d. $P(E_1 \cap E_3) = \frac{n(E_1 \cap E_3)}{n(S)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

e. Kejadian terambilnya bohlam putih atau bohlam yang terbakar terdapat irisan, sehingga:

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_3)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{18} - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{6}{18} + \frac{5}{18} - \frac{2}{18}$$

$$= \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$



Pojok Matematika

Statistika Cuaca

- ▷ Setiap ramalan cuaca yang muncul di layar televisi atau aplikasi ponsel merupakan hasil dari perhitungan statistik yang kompleks, bukan sekadar tebakan. Ilmuwan meteorologi memanfaatkan data cuaca masa lalu, seperti suhu udara, tekanan atmosfer, kelembapan, dan arah angin, untuk memperkirakan kemungkinan turunnya hujan. Data tersebut dikumpulkan selama bertahun-tahun, lalu dianalisis menggunakan model matematis untuk menemukan pola berulang yang dapat dijadikan dasar prediksi. Jika suatu wilayah dalam kondisi tertentu pernah mengalami hujan 80 kali dari 100 pengamatan serupa, maka peluang turunnya hujan dalam kondisi yang sama diperkirakan sebesar 80%. Dengan cara ini, prediksi cuaca menjadi hasil nyata dari penerapan teori peluang dalam kehidupan sehari-hari.
- ▷ Proses peramalan cuaca melibatkan ribuan data yang diolah melalui teknologi komputer berkecepatan tinggi. Satelit, radar, dan sensor di berbagai titik bumi mengumpulkan informasi atmosfer secara real-time, kemudian data tersebut dibandingkan dengan pola kejadian masa lalu untuk memperkirakan hasil yang paling mungkin terjadi. Analisis ini tidak hanya mengandalkan frekuensi, tetapi juga mempertimbangkan hubungan antarfaktor, seperti pengaruh suhu terhadap tekanan udara atau pergerakan awan terhadap potensi hujan. Penerapan statistik dalam meteorologi menunjukkan bagaimana ilmu matematika mampu mengubah ketidakpastian alam menjadi informasi yang bermanfaat bagi masyarakat, mulai dari perencanaan kegiatan hingga sistem peringatan dini bencana.
- ▷ Dalam dunia meteorologi modern, statistik berperan sebagai dasar utama dalam pengambilan keputusan yang berkaitan dengan keselamatan dan keberlanjutan. Prediksi hujan digunakan oleh sektor pertanian untuk menentukan waktu tanam, oleh maskapai penerbangan untuk merencanakan rute aman, dan oleh pemerintah untuk mengantisipasi banjir atau kekeringan. Akurasi ramalan cuaca terus meningkat seiring kemajuan teknologi analisis data dan pemodelan probabilistik. Melalui penerapan teori peluang, para ahli dapat mengubah pola alam yang semula tampak acak menjadi sistem yang dapat dipahami dan diprediksi. Hal ini membuktikan bahwa di balik setiap perkiraan hujan terdapat kerja ilmiah yang menggabungkan kekuatan data, matematika, dan pemahaman mendalam terhadap perilaku alam.



Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang peluang, ruang sampel, frekuensi harapan, dan frekuensi relatif. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

- 1) Pada percobaan yang menghasilkan n kemungkinan yang sama besar, peluang munculnya salah satu kemungkinan adalah $\frac{1}{n}$ dengan n bilangan asli.
- 2) Ruang sampel adalah himpunan dari semua kemungkinan. Anggota dari ruang sampel disebut titik sampel. Kejadian adalah subhimpunan dari ruang sampel.

Peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan $n(A)$ banyak anggota himpunan A dan $n(S)$ banyak anggota ruang sampel.

- 3) Kejadian sederhana adalah kejadian yang terdiri atas satu anggota ruang sampel atau satu titik sampel.
- 4) Nilai frekuensi harapan kejadian A dapat ditaksir melalui nilai peluang kejadian A ($P(A)$) dikalikan banyak percobaan (n).

$$F(A) = P(A) \times n$$

- 5) Peluang gabungan dua kejadian memenuhi aturan penjumlahan dua himpunan, yaitu:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Latihan Soal

- Pada pengundian dua dadu secara bersamaan, peluang muncul mata dadu berjumlah 9 adalah ...
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{9}$
- Perhatikan beberapa kejadian/peristiwa berikut.
 - Munculnya mata dadu 7 dari hasil pelemparan sebuah dadu.
 - Kelahiran seorang bayi laki-laki.
 - Terambilnya kartu bernomor 11 dari satu set kartu remi.
 - Kematian seorang manusia.
 - Terbitnya matahari setiap harinya.
 - Munculnya api di kedalaman lautan.
 - Seekor kucing dapat berbahasa Indonesia.Dari kejadian/peristiwa di atas, manakah yang memiliki peluang kejadian adalah ...
 - 1, 3, 6, dan 7
 - 2, 4, dan 5
 - 1, 5, dan 6
 - 3, 6, dan 7
- Dalam percobaan melempar undi 3 koin uang logam secara bersamaan, peluang muncul 1 angka adalah ...
 - $\frac{5}{8}$
 - $\frac{3}{5}$
 - $\frac{2}{3}$
 - $\frac{3}{8}$
- Seorang pedagang telur memiliki 200 butir telur. Karena kurang hati-hati, 10 butir telur pecah saat diletakkan di dalam peti. Jika sebutir telur diambil secara acak, peluang terambilnya telur yang tidak pecah adalah ...
 - $\frac{19}{20}$
 - $\frac{18}{20}$
 - $\frac{15}{20}$
 - $\frac{1}{20}$
- Pada pelemparan 3 mata uang logam yang dilakukan dalam tempo waktu yang sama sebanyak 80 kali, frekuensi harapan munculnya paling sedikit 1 angka dari pelemparan uang logam itu adalah ...
 - 70 kali
 - 60 kali
 - 50 kali
 - 40 kali
- Sebuah dadu dilambungkan sebanyak 120 kali. Frekuensi harapan munculnya mata dadu bilangan prima adalah ...
 - 20 kali
 - 30 kali
 - 40 kali
 - 60 kali

Referensi

- Budhi, Wono Setya. 2023. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- Ross, S. M. 2019. *A first course in probability (10th ed.)*. Pearson Education.
- Wahyuni, T., & Sari, M. 2020. Analisis konsep dasar teori peluang dalam pembelajaran matematika. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 5(1), 12–19.
- Saputra, R., & Mahmudah, S. 2019. Penerapan konsep frekuensi harapan dalam analisis data eksperimen. *Jurnal Statistika dan Aplikasinya*, 3(2), 67–74.
- Di Paola, G. 2018. A brief introduction to probability. *Journal of Thoracic Disease*, 10(Suppl 33), S3955–S3959.
- Prasetyo, D. 2019. Sejarah uang logam dan penggunaannya di Asia Tenggara. *Jurnal Sejarah dan Budaya*, 13(1), 21–33.
- Stoica, O. C. 2025. Born rule: Quantum probability as classical probability. *International Journal of Theoretical Physics*, 64(2), 1–12.
- Hidayat, S. 2020. Kepastian dan kemustahilan dalam teori peluang: Kajian filsafat sains. *Jurnal Filsafat dan Logika*, 6(2), 77–88.
- Joslyn, S. L., & Grounds, M. A. 2022. Communicating probability information in weather forecasts. *Weather, Climate, and Society*, 14(2), 435–449.