Kelas 12

MATEMATIKA

Eksplorasi Matematika Tingkat Lanjut:

Buku Pegangan Matematika untuk Siswa Kelas 12

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas terbitnya e-book Matematika ini yang merupakan bagian dari upaya menghadirkan pembelajaran yang lebih mudah diakses oleh seluruh pelajar Indonesia. Matematika adalah mata pelajaran yang mempelajari tentang pola pikir logis, keterampilan berhitung, serta kemampuan memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.

E-book ini disusun berdasarkan Capaian Pembelajaran Matematika Fase E (sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Nomor 008/H/KR/2022 Tentang Capaian Pembelajaran Pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah Pada Kurikulum Merdeka). Konten e-book ini dirancang agar peserta didik dapat memahami materi Matematika secara komprehensif, mengasah keterampilan berpikir kritis, serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain materi utama, e-book ini juga dilengkapi dengan latihan soal, pembahasan, serta tautan ke sumber belajar tambahan seperti video pembelajaran interaktif.

E-book ini merupakan bagian dari platform Fitri, sebuah platform pembelajaran digital yang menyediakan akses gratis ke berbagai materi belajar, termasuk e-book, latihan soal, dan video pembelajaran interaktif untuk seluruh anak Indonesia. Fitri hadir sebagai wujud kontribusi nyata dalam mendukung pemerataan akses pendidikan berkualitas di Indonesia. Dengan semangat gotong royong dan inklusi, Fitri berkomitmen untuk membantu seluruh siswa, di mana pun berada, agar dapat belajar secara mandiri, efektif, dan menyenangkan. Hal ini selaras dengan tujuan besar pendidikan Indonesia, yaitu mewujudkan generasi yang cerdas, berkarakter, dan siap menghadapi tantangan zaman.

Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung tersedianya e-book ini. Semoga kehadiran e-book Matematika ini dapat memberikan manfaat nyata dalam proses belajar peserta didik dan turut berkontribusi dalam meningkatkan literasi bangsa.

Jakarta, Juni 2025

Tim Fitri

Daftar Isi

BAB 1

MATEMATIKA KEUANGAN

Karakter Pelajar Pancasila

- ▷ **Mandiri**

  Menyelesaikan masalah keuangan secara independen dengan menggunakan rumus yang relevan untuk mencapai tujuan finansial, serta mengaplikasikan perhitungan bunga dan anuitas dalam berbagai konteks kehidupan nyata.

- ▷ **Bernalar Kritis**

  Mampu menganalisis dan memecahkan masalah keuangan yang melibatkan bunga tunggal, bunga majemuk, rente, dan anuitas.

Kata Kunci: Bunga, Anuitas, Model Keuangan, Pinjaman, Investasi, Sistem Keuangan, Kalkulasi Bunga.

Tujuan Pembelajaran: Menyelesaikan Tantangan Keuangan dengan Logika Matematika

1. **Memecahkan masalah terkait bunga tunggal dan bunga majemuk dalam konteks keuangan.**
   - ▷ Memahami konsep dasar bunga tunggal dan bunga majemuk.
   - ▷ Mengaplikasikan rumus bunga tunggal dan bunga majemuk untuk menyelesaikan masalah keuangan.

2. **Menyelesaikan persoalan terkait rente dalam bidang keuangan.**
   - ▷ Menjelaskan konsep rente dan bagaimana penggunaannya dalam keuangan.
   - ▷ Menggunakan metode perhitungan rente untuk berbagai kasus keuangan.

3. **Menyelesaikan permasalahan terkait anuitas dalam sistem pinjaman.**
   - ▷ Mengidentifikasi jenis-jenis anuitas dalam sistem keuangan.
   - ▷ Menerapkan metode perhitungan anuitas dalam kasus pinjaman.

4. **Membuat model untuk pinjaman dan investasi dengan menggunakan bunga majemuk serta anuitas.**
   - ▷ Mengembangkan model keuangan untuk investasi berbasis bunga majemuk.
   - ▷ Menganalisis penggunaan anuitas dalam perencanaan pinjaman dan investasi.
5. **Menentukan nilai tunai dan nilai akumulasi pembayaran yang dilakukan dalam berbagai kondisi.**
   - ▷ Menghitung nilai tunai untuk pembayaran tepat waktu, tertunda, atau dilakukan secara berkala.
   - ▷ Menentukan nilai akumulasi pembayaran berdasarkan frekuensi pembayaran dan kondisi lainnya.

1. Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk

Pengertian Bunga

Bunga adalah imbalan yang diperoleh atas penggunaan uang yang dipinjamkan atau simpanan yang diinvestasikan dalam jangka waktu tertentu. Dalam praktik keuangan, bunga menjadi komponen penting yang digunakan untuk menghitung keuntungan, pembayaran pinjaman, atau pengembalian investasi.

Ilustrasi Suku Bunga Keuangan – Getty Images

Bunga dihitung berdasarkan beberapa parameter utama, yaitu jumlah pinjaman atau simpanan awal, suku bunga, dan waktu. Berikut adalah rumus dasar yang sering digunakan dalam perhitungan bunga:

a. Rumus Jumlah Uang

Jumlah uang yang diperoleh setelah penambahan bunga dapat dihitung dengan rumus berikut:

Jumlah Uang = Pinjaman atau Simpanan Mula-Mula + Bunga

b. Rumus Bunga

Untuk menghitung bunga yang diterima atau dibayarkan:

Bunga = Jumlah Uang – Pinjaman atau Simpanan Mula-Mula

c. Rumus Suku Bunga

Suku bunga adalah tingkat bunga yang dinyatakan dalam persentase dari pinjaman atau simpanan mula-mula, dan dapat dihitung dengan rumus:

$$\text{Suku Bunga } (\%) = \frac{\text{Bunga}}{\text{Pinjaman atau Simpanan Mula} - \text{Mula}} \times 100\%$$

Contoh Soal Suku Bunga

Tuan Andi meminjam uang sebesar Rp10.000.000,00 selama 1 tahun dengan bunga sebesar Rp1.500.000,00. Berapakah suku bunga yang dikenakan?

Pembahasan:

Gunakan rumus suku bunga:

$$\text{Suku Bunga (\%)} = \frac{\text{Bunga}}{\text{Pinjaman atau Simpanan Mula} - \text{Mula}} \times 100\%$$

Diketahui:

Bunga = Rp1.500.000,00

Pinjaman/Simpanan Mula-Mula = Rp10.000.000,00

Substitusikan nilai ke dalam rumus:

$$\text{Suku Bunga (\%)} = \frac{1.500.000}{10.000.000} \times 100\%$$

$$\text{Suku Bunga (\%)} = 0{,}15 \times 100\% = 15\%$$

Jawaban: Suku bunga yang dikenakan adalah 15% per tahun.

Persen di Atas Seratus dan Persen di Bawah Seratus

Persentase sering digunakan dalam berbagai perhitungan keuangan, termasuk perhitungan bunga, laba, dan diskon. Dalam konsep ini, persen di atas seratus dan di bawah seratus memiliki perbedaan penting:

a. Persen di Atas Seratus

- ▷ **Definisi**

  Nilai yang melebihi 100%, menunjukkan peningkatan dari jumlah awal.

- ▷ **Contoh**

  Ketika bunga suatu investasi adalah 150%, maka nilai akhir akan menjadi 1,5 kali lipat dari nilai awal.

- ▷ **Rumus**

$$\text{Nilai Akhir} = \text{Nilai Awal} \times \left(1 + \frac{\text{Persentase}}{100}\right)$$

Contoh Soal Persen di Atas Seratus

Sebuah investasi awal sebesar Rp8.000.000,00 mengalami kenaikan sebesar 120% dari nilai awalnya. Berapakah nilai akhir investasi tersebut?

Pembahasan:

Gunakan rumus persen di atas seratus:

$$\text{Nilai Akhir} = \text{Nilai Awal} \times \left(1 + \frac{\text{Persentase}}{100}\right)$$

Diketahui:

Nilai Awal = Rp8.000.000,00

Persentase = 120%

Substitusikan nilai ke dalam rumus:

$\text{Nilai Akhir} = 8.000.000 \times \left(1 + \frac{120}{100}\right)$

$\text{Nilai Akhir} = 8.000.000 \times (1 + 1{,}2)$

$\text{Nilai Akhir} = 8.000.000 \times 2{,}2 = \text{Rp}17.600.000{,}00$

Jawaban: Nilai akhir investasi tersebut adalah Rp17.600.000,00.

b. Persen di Bawah Seratus

▷ **Definisi**

Nilai yang kurang dari 100%, menunjukkan pengurangan atau penurunan dari jumlah awal.

▷ **Contoh**

Diskon 25% berarti pengurangan sebesar 25% dari nilai awal.

▷ **Rumus**

$$\text{Nilai Akhir} = \text{Nilai Awal} \times \left(1 - \frac{\text{Persentase}}{100}\right)$$

Contoh Soal Persen di Bawah Seratus

Sebuah toko memberikan diskon 25% untuk sebuah barang yang harganya Rp400.000,00. Berapakah harga setelah diskon?

Pembahasan:

Gunakan rumus persen di bawah seratus:

$\mathbf{Nilai\ Akhir} = \mathbf{Nilai\ Awal} \times \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{Persentase}}{\mathbf{100}}\right)$

Diketahui:

Nilai Awal = Rp400.000,00

Persentase Diskon = 25%

Substitusikan nilai ke dalam rumus:

$\mathbf{Nilai\ Akhir = 400.000 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right)}$

$\mathbf{Nilai\ Akhir = 400.000 \times (1 - 0{,}25)}$

$\mathbf{Nilai\ Akhir = 400.000 \times 0{,}75 = Rp300.000{,}00}$

Jawaban: Harga setelah diskon adalah Rp300.000,00.

c. Rumus Laba

$$\text{Laba} = \text{Harga Jual} - \text{Harga Pokok}$$

d. Rumus Diskon

$$\text{Diskon} = \text{Harga Awal} \times \frac{\text{Persentase Diskon}}{100}$$

e. Penggunaan Persen di Atas Seratus dan Persen di Bawah Seratus

Dalam kehidupan sehari-hari, persen di atas seratus digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan atau keuntungan (misalnya, kenaikan nilai investasi). Sebaliknya, persen di bawah seratus digunakan untuk pengurangan atau kerugian (misalnya, diskon harga).

Bunga Tunggal dan Diskonto

a. Bunga Tunggal

Bunga tunggal adalah bunga yang dihitung berdasarkan persentase tertentu dari pinjaman atau simpanan awal (modal) tanpa memperhitungkan akumulasi bunga sebelumnya. Dengan kata lain, bunga tunggal tidak mengalami perubahan setiap periode karena hanya dihitung dari modal awal. Berikut adalah beberapa rumus penting dalam perhitungan bunga tunggal:

▷ **Besar bunga tunggal setelah t tahun:**

$$B = M \times r \times t$$

Di mana:

B = Besar bunga

M = Modal awal (pinjaman/simpanan mula-mula)

r = Suku bunga per tahun dalam desimal

t = Waktu dalam tahun

▷ **Besar bunga tunggal setelah t bulan:**

$$B = M \times r \times \frac{t}{12}$$

▷ **Besar bunga tunggal setelah t hari:**

$$B = M \times r \times \frac{t}{360}$$

▷ **Modal akhir (A) setelah penambahan bunga:**

$$A = M + B$$

atau

$$A = M \times (1 + r \times t)$$

Contoh Soal Bunga Tunggal

Seorang investor menyimpan uang sebesar Rp50.000.000,00 di bank dengan suku bunga tunggal sebesar 6% per tahun. Berapa besar bunga yang diperoleh setelah 3 tahun, dan berapa total uang yang dimiliki setelah periode tersebut?

Pembahasan:

Diketahui:

Modal awal (M) = Rp50.000.000,00

Suku bunga (r) = 6% = 0,06

Waktu (t) = 3 tahun

1. Hitung besar bunga:

$\mathrm{B} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \mathrm{t}$

$\mathrm{B} = 50.000.000 \times 0{,}06 \times 3 = \mathrm{Rp}9.000.000{,}00$

2. Hitung total uang:

$\mathrm{A} = \mathrm{M} \times \mathrm{B}$

$\mathrm{B} = 50.000.000 + 9.000.000 = \mathrm{Rp}59.000.000{,}00$

Jawaban: Besar bunga yang diperoleh adalah Rp9.000.000,00, dan total uang yang dimiliki setelah 3 tahun adalah Rp59.000.000,00.

b. Diskonto

Diskonto adalah potongan bunga yang dihitung di awal masa pinjaman, sehingga jumlah uang yang diterima peminjam lebih kecil daripada jumlah pinjaman yang harus dibayar pada akhir masa pinjaman. Diskonto sering digunakan dalam pinjaman jangka pendek atau dalam transaksi seperti surat berharga.

- **Besar diskonto (D):**

$$\mathrm{D} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \mathrm{t}$$

Di mana:

M = Jumlah pinjaman (nilai nominal)

D = Diskonto

A = Modal yang diterima di awal

- **Modal yang diterima di awal pinjaman (A):**

$$\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{D}$$

- **Diskonto untuk masa pinjaman t tahun:**

$$\mathrm{D} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \mathrm{t}$$

- **Diskonto untuk masa pinjaman t bulan:**

$$\mathrm{D} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \frac{\mathrm{t}}{12}$$

- **Besar bunga tunggal setelah t hari:**

$$\mathrm{D} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \frac{\mathrm{t}}{360}$$

Contoh Soal Diskonto

Tuan Budi meminjam uang sebesar Rp100.000.000,00 dengan diskonto 10% per tahun selama 6 bulan. Berapa besar diskonto yang dikenakan, dan berapa uang yang diterima oleh Tuan Budi di awal pinjaman?

Pembahasan:

Diketahui:

Nilai nominal (M) = Rp100.000.000,00

Diskonto (r) = 10% = 0,1

Waktu (t) = 6 bulan = $\frac{6}{12}$ tahun

1. Hitung besar diskonto:

$\mathrm{D} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \mathrm{t}$

$\mathrm{D} = 100.000.000 \times 0{,}1 \times \frac{6}{12} = \mathrm{Rp}5.000.000{,}00$

2. Hitung modal yang diterima di awal:

$\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{D}$

$\mathrm{A} = 100.000.000 - 5.000.000$

Jawaban: Besar diskonto yang dikenakan adalah Rp5.000.000,00, dan uang yang diterima oleh Tuan Budi di awal adalah Rp95.000.000,00.

c. Metode Perhitungan Bunga Tunggal

Dalam menghitung bunga tunggal, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan sesuai dengan kebutuhan dan sifat transaksi. Berikut adalah tiga metode utama dalam perhitungan bunga tunggal:

1) Metode Pembagi Tetap

Metode ini menghitung bunga berdasarkan nilai tetap setiap periode. Rumus yang digunakan sama dengan rumus dasar bunga tunggal:

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \mathrm{t}}$$

Ciri-ciri Metode Pembagi Tetap:

- ▷ Bunga yang dibayarkan setiap periode selalu sama.
- ▷ Cocok untuk pinjaman sederhana atau tabungan dengan perjanjian jangka waktu tetap.

Contoh Soal Perhitungan Bunga Tunggal Metode Pembagi Tetap

Seorang nasabah menyimpan Rp20.000.000,00 di bank dengan suku bunga tunggal 8% per tahun. Berapa bunga yang diterima setiap tahun selama 5 tahun?

Pembahasan:

Diketahui:

Modal awal (M) = Rp20.000.000,00

Suku bunga (r) = 8% = 0,08

Waktu (t) = 1 tahun (per periode)

Hitung besar bunga per tahun:

$\mathbf{B} = \mathbf{M} \times \mathbf{r} \times \mathbf{t}$

$\mathrm{B} = 20.000.000 \times 0{,}08 \times 1 = \mathrm{Rp}1.600.000{,}00$

Jawaban: Nasabah akan menerima bunga sebesar Rp1.600.000,00 setiap tahun.

2) Metode Persen yang Sebanding

Metode ini digunakan untuk menghitung bunga berdasarkan periode waktu yang berbeda, seperti per bulan atau per hari, dengan tetap mempertimbangkan persentase tahunan.

$$\mathrm{B} = \mathrm{M} \times \mathrm{r} \times \frac{t}{T}$$

Di mana: T adalah total waktu dalam satu periode standar (misalnya, 12 bulan untuk per tahun, atau 360 hari untuk per tahun).

Contoh Soal Perhitungan Bunga Tunggal Metode Persen yang Sebanding

Seorang peminjam meminjam Rp15.000.000,00 dengan bunga tunggal sebesar 9% per tahun untuk 4 bulan. Berapa besar bunga yang harus dibayar?

Pembahasan:

Diketahui:

Modal awal (M) = Rp15.000.000,00

Suku bunga (r) = 9% = 0,09

Waktu (t) = 4 bulan

Total waktu dalam setahun (T)= 12 bulan

Substitusikan ke rumus:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \times \mathbf{r} \times \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{T}}$$

$$\mathrm{B} = 15.000.000 \times 0{,}09 \times \frac{4}{12}$$

$$\mathrm{B} = 15.000.000 \times 0{,}09 \times 0{,}3333 = \mathrm{Rp}450.000{,}00$$

Jawaban: Besar bunga yang harus dibayar adalah Rp450.000,00.

3) Metode Persen yang Seukuran

Metode ini menghitung bunga dengan memperhatikan bahwa persentase bunga dapat diubah ke periode yang lebih kecil atau lebih besar. Misalnya, mengubah bunga tahunan menjadi bunga bulanan atau harian. Berikut rumus mengubah suku bunga:

▷ **Dari tahunan ke bulanan:**

$$r_{bulan} = \frac{r_{tahun}}{12}$$

▷ **Dari tahunan ke harian:**

$$r_{hari} = \frac{r_{tahun}}{360}$$

Contoh Soal Perhitungan Bunga Tunggal Metode Persen yang Seukuran

Sebuah tabungan memberikan suku bunga tahunan sebesar 10%. Jika bunga dihitung setiap bulan, berapa besar bunga yang diperoleh dalam 3 bulan untuk modal Rp12.000.000,00?

Pembahasan:

Diketahui:

Modal awal (M) = Rp12.000.000,00

Suku bunga tahunan (r_{tahun}) = 10% = 0,10

Waktu (t) = 3 bulan

Suku bunga bulanan (r_{bulan})

$$r_{bulan} = \frac{r_{tahun}}{12} = \frac{0{,}10}{12} = 0{,}00833$$

Hitung besar bunga:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \times r_{bulan} \times \mathbf{t}$$

$$\mathrm{B} = 12.000.000 \times 0{,}00833 \times 3 = \mathrm{Rp}300.000{,}00$$

Jawaban: Besar bunga yang diperoleh dalam 3 bulan adalah Rp300.000,00.

Bunga Majemuk

Bunga majemuk adalah bunga yang dihitung tidak hanya dari modal awal, tetapi juga dari bunga yang sudah terakumulasi sebelumnya. Dengan kata lain, bunga majemuk memungkinkan bunga untuk "bertumbuh" karena bunga yang diperoleh setiap periode akan ditambahkan ke modal awal dan dihitung kembali pada periode berikutnya. Bunga majemuk sering digunakan dalam investasi jangka panjang atau pinjaman yang melibatkan bunga yang terus bertambah seiring waktu.

Misalkan seseorang menyimpan Rp10.000.000,00 di bank dengan bunga majemuk sebesar 5% per tahun. Pada akhir tahun pertama, bunga yang diperoleh adalah Rp500.000,00. Namun, pada akhir tahun kedua, bunga dihitung dari total Rp10.500.000,00, sehingga bunga pada tahun kedua menjadi Rp525.000,00. Proses ini terus berulang pada tahun-tahun berikutnya.

a. Nilai akhir Bunga Majemuk

▷ **Rumus Nilai Akhir Bunga Majemuk**

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{M} \times (1 + r)^t}$$

Di mana:

A = Nilai akhir (modal + bunga)

M = Modal awal

r = Suku bunga per periode (dalam desimal)

t = Jumlah periode waktu

▷ **Nilai Akhir untuk Periode Bunga Pecahan**

Jika periode waktu tidak genap (misalnya, beberapa bulan atau hari), maka rumus menjadi:

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{M} \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{t \times n}}$$

Di mana: n adalah frekuensi penghitungan bunga dalam satu tahun (misalnya, 12 untuk bulanan atau 360 untuk harian).

Contoh Soal Nilai Akhir Bunga Majemuk

Seorang investor menanam modal Rp5.000.000,00 dengan bunga majemuk 8% per tahun. Hitung nilai akhir setelah 3 tahun.

Pembahasan:

Diketahui:

Modal awal (M) = Rp5.000.000,00

Suku bunga (r) = 8% = 0,08

Waktu (t) = 3 tahun

Gunakan rumus nilai akhir bunga majemuk:

$\mathbf{A = M \times (1 + \boldsymbol{r})^{\boldsymbol{t}}}$

$\mathrm{A} = 5.000.000 \times (1 + 0{,}08)^3$

$\mathrm{A} = 5.000.000 \times (1{,}08)^3 = \mathrm{Rp}6.298.560{,}00$

Jawaban: Nilai akhir setelah 3 tahun adalah Rp6.298.560,00.

b. Nilai Tunai Bunga Majemuk

▷ **Rumus Nilai Tunai Bunga Majemuk**

Untuk menghitung nilai tunai dari jumlah uang yang akan diterima di masa depan, digunakan rumus:

$$\mathrm{M} = \frac{A}{(1+r)^t}$$

Di mana:

M = Nilai tunai saat ini

A = Nilai uang di masa depan

r = Suku bunga per periode

t = Jumlah periode waktu

▷ **Nilai Tunai untuk Periode Bunga Pecahan**

Jika periode waktu tidak genap:

$$\mathrm{M} = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{t\times n}}$$

Contoh Soal Nilai Tunai Bunga Majemuk

Berapa nilai tunai dari uang Rp10.000.000,00 yang akan diterima 5 tahun lagi, jika suku bunga majemuk adalah 6% per tahun?

Pembahasan:

Diketahui:

Nilai uang masa depan (A = Rp10.000.000,00

Suku bunga (r) = 6% = 0,06

Waktu (t) = 5 tahun

Gunakan rumus nilai tunai bunga majemuk:

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{A}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{t}}}$$

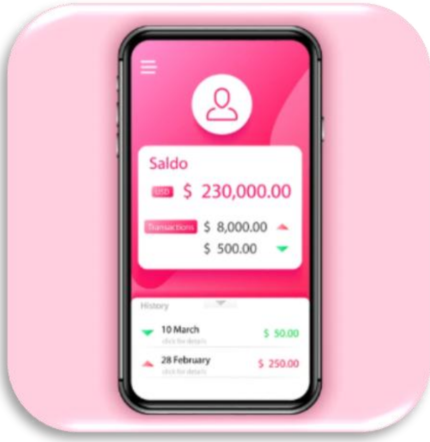
$$\mathrm{M} = \frac{10.000.000}{(1+0{,}06)^5} = \frac{10.000.000}{1{,}3382255776} = \mathrm{Rp}7.472.580{,}00$$

Jawaban: Nilai tunai dari uang Rp10.000.000,00 yang akan diterima 5 tahun lagi adalah Rp7.472.580,00.

Pojok Matematika

Uang Bisa Bertumbuh Sendiri Secara Eksponensial!

- ▷ Kalau kamu menabung Rp1.000.000,00 dengan bunga majemuk 10% per tahun, maka dalam 25 tahun uangmu bisa jadi lebih dari Rp10.800.000,00,padahal kamu tidak menambahkan sepeser pun! Ini karena bunga majemuk membuat uang "beranak pinak" secara eksponensial.
- ▷ Dengan menyimpan uang di instrumen yang memberi bunga majemuk tinggi, kamu bisa mengalahkan inflasi dan meningkatkan daya beli. Misalnya, bunga majemuk 12% per tahun akan melipatgandakan uangmu setiap 6 tahun.



2. Rente

Pengertian dan Macam-Macam Rente

Konsep Rente pada Pembayaran Kredit Pemilikan Rumah (KPR) – Getty Images

Rente adalah rangkaian pembayaran atau penerimaan uang yang dilakukan secara berkala dengan jumlah yang sama selama periode tertentu. Rente sering digunakan dalam perhitungan keuangan seperti pembayaran angsuran pinjaman, tabungan berjangka, atau investasi. Berikut adalah macam-macam rente berdasarkan beberapa kriteria:

a. Rente Berdasarkan Saat Pembayaran Angsuran

- ▷ Rente Pranumerando: Pembayaran dilakukan di awal setiap periode.
- ▷ Rente Postnumerando: Pembayaran dilakukan di akhir setiap periode.

b. Rente Berdasarkan Jumlah Angsuran

- ▷ Rente Terbatas: Pembayaran dilakukan selama periode tertentu saja.
- ▷ Rente Kekal: Pembayaran dilakukan terus-menerus tanpa batas waktu.

c. Rente Berdasarkan Langsung atau Tidaknya Pembayaran Pertama

- ▷ Rente Langsung: Pembayaran dimulai segera pada periode pertama.
- ▷ Rente yang Ditangguhkan: Pembayaran dimulai setelah beberapa periode tertentu.

Nilai Akhir Rente

a. Nilai Akhir Rente Pranumerando

Nilai akhir dari rente pranumerando adalah jumlah dari semua pembayaran yang dilakukan di awal periode setelah bunga diperhitungkan untuk setiap pembayaran. Rumus untuk menghitung nilai akhir rente pranumerando adalah:

$$S = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (1+r)$$

Di mana:

S = Nilai akhir rente pranumerando

R = Jumlah pembayaran per periode

r = Suku bunga per periode

n = Jumlah periode

b. Nilai Akhir Rente Postnumerando

Nilai akhir dari rente postnumerando adalah jumlah dari semua pembayaran yang dilakukan di akhir periode setelah bunga diperhitungkan. Rumus untuk menghitung nilai akhir rente postnumerando adalah:

$$S = R \times \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Contoh Soal Nilai Akhir Rente

Seseorang menyimpan Rp2.000.000,00 setiap tahun di akhir tahun dengan suku bunga 5% per tahun. Hitung nilai akhir setelah 5 tahun (rente postnumerando).

Pembahasan:

Diketahui:

Jumlah pembayaran per tahun (R) = Rp2.000.000,00

Suku bunga (r) = 5% = 0,05

Jumlah periode (n) = 5

Gunakan rumus nilai akhir rente postnumerando:

$$\boldsymbol{S = R \times \frac{(1 + r)^n - 1}{r}}$$

$$S = 2.000.000 \times \frac{(1 + 0,05)^5 - 1}{0,05}$$

$$S = 2.000.000 \times \frac{(1,2762815625) - 1}{0,05}$$

$$S = 2.000.000 \times \frac{(0,2762815625)}{0,05}$$

$$S = 2.000.000 \times 5,52563125 = Rp11.051.262,50$$

Jawaban: Nilai akhir setelah 5 tahun adalah Rp11.051.262,50.

Nilai Tunai Rente

a. Nilai Tunai Rente Pranumerando

Nilai tunai dari rente pranumerando adalah jumlah uang yang setara dengan serangkaian pembayaran di awal periode, dihitung dengan diskonto setiap pembayaran ke nilai sekarang. Rumus untuk menghitung nilai tunai rente pranumerando adalah:

$$P = R \times \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \times (1 + r)$$

Di mana:

P = Nilai tunai rente pranumerando

R = Jumlah pembayaran per periode

r = Suku bunga per periode

n = Jumlah periode

b. Nilai Tunai Rente Postnumerando

Nilai tunai dari rente postnumerando adalah jumlah uang yang setara dengan serangkaian pembayaran di akhir periode. Rumus untuk menghitung nilai tunai rente postnumerando adalah:

$$P = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Contoh Soal Nilai Tunai Rente

Seseorang akan menerima Rp3.000.000,00 setiap tahun selama 4 tahun di akhir tahun dengan suku bunga 6% per tahun. Hitung nilai tunai dari rente tersebut (rente postnumerando).

Pembahasan:

Diketahui:

Jumlah pembayaran per tahun (R) = Rp3.000.000,00

Suku bunga (r) = 6% = 0,06

Jumlah periode (n) = 4

Gunakan rumus nilai akhir rente postnumerando:

$$\boldsymbol{P = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}}$$

$$P = 3.000.000 \times \frac{1 - (1+0{,}06)^{-4}}{0{,}06}$$

$$P = 3.000.000 \times \frac{1 - (0{,}792094)}{0{,}06}$$

$$P = 3.000.000 \times \frac{(0{,}207906)}{0{,}06}$$

$$P = 2.000.000 \times 3{,}4651 = Rp10.395.300{,}00$$

Jawaban: Nilai tunai dari rente tersebut adalah Rp10.395.300,00.

Nilai Tunai Rente Kekal

Rente kekal adalah serangkaian pembayaran atau penerimaan yang berlangsung selamanya, tanpa batas waktu. Karena tidak ada periode akhir, nilai tunai rente kekal dihitung dengan pendekatan khusus, menggunakan suku bunga untuk mendiskonto pembayaran ke nilai sekarang. Rente kekal memiliki dua jenis utama berdasarkan waktu pembayaran:

a. Nilai Tunai Rente Kekal Pranumerando

Nilai tunai rente kekal pranumerando adalah nilai sekarang dari serangkaian pembayaran tetap yang dilakukan di awal setiap periode dan berlangsung selamanya. Rumus untuk menghitung nilai tunai rente kekal pranumerando adalah:

$$P = \frac{R}{r} \times (1+r)$$

Di mana:

P = Nilai tunai rente kekal pranumerando

R = Jumlah pembayaran per periode

r = Suku bunga per periode

Penjelasan: Karena pembayaran dilakukan di awal periode, setiap pembayaran langsung bertambah nilainya sebesar satu periode suku bunga (1 + r) dibandingkan rente kekal postnumerando.

Contoh Soal Nilai Tunai Rente Kekal Pranumerando

Seseorang menerima pembayaran Rp1.000.000,00 setiap tahun di awal tahun dengan suku bunga 10% per tahun. Hitung nilai tunai rente kekal tersebut. **Pembahasan:**

Diketahui:

Jumlah pembayaran per tahun (R) = Rp1.000.000,00

Suku bunga (r) = 10% = 0,10

Gunakan rumus rente kekal pranumerando:

$$\boldsymbol{P = \frac{R}{r} \times (1 + r)}$$

$$P = \frac{1.000.000}{0{,}10} \times (1 + 0{,}10)$$

$$P = 10.000.000 \times 1{,}10 = Rp11.000.000{,}00$$

Jawaban: Nilai tunai rente kekal pranumerando adalah Rp11.000.000,00.

b. Nilai Tunai Rente Kekal Postnumerando

Nilai tunai rente kekal postnumerando adalah nilai sekarang dari serangkaian pembayaran tetap yang dilakukan di akhir setiap periode dan berlangsung selamanya. Rumus untuk menghitung nilai tunai rente kekal postnumerando adalah:

$$P = \frac{R}{r}$$

Di mana:

P = Nilai tunai rente kekal postnumerando

R = Jumlah pembayaran per periode

r = Suku bunga per periode

Penjelasan:

Pembayaran dilakukan di akhir setiap periode, sehingga tidak ada penyesuaian tambahan seperti pada rente pranumerando.

Contoh Soal Nilai Tunai Rente Kekal Postnumerando

Seseorang menerima pembayaran Rp1.000.000,00 setiap tahun di akhir tahun dengan suku bunga 10% per tahun. Hitung nilai tunai rente kekal tersebut.

Pembahasan:

Jumlah pembayaran per tahun (R) = Rp1.000.000,00

Suku bunga (r) = 10% = 0,10

Gunakan rumus rente kekal postnumerando:

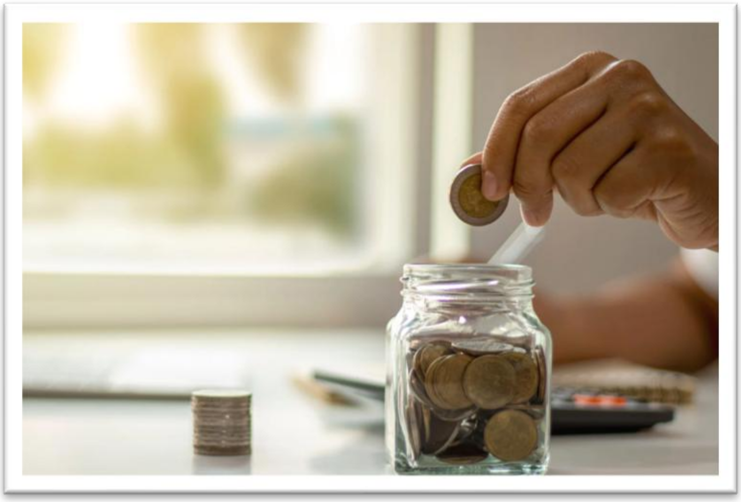
$$\boldsymbol{P = \frac{R}{r}}$$

$$P = \frac{1.000.000}{0{,}10} = Rp10.000.000{,}00$$

Jawaban: Nilai tunai rente kekal postnumerando adalah Rp10.000.000,00.

3. Anuitas

Pengertian Anuitas



Konsep Anuitas pada Tabungan Berjangka – Canva

Anuitas adalah rangkaian pembayaran atau penerimaan sejumlah uang yang sama secara berkala selama periode tertentu. Contohnya termasuk pembayaran cicilan pinjaman, tabungan berjangka, atau investasi. Dalam anuitas, pembayaran atau penerimaan dapat dilakukan di awal atau di akhir periode.

a. Rumus Anuitas

$$A = P \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Di mana:

A = Besar anuitas (angsuran per periode)

P = Nilai pinjaman atau investasi awal

r = Suku bunga per periode

n = Jumlah periode

B_1 = Bunga pada periode pertama

b. Rumus Besar Bunga Pertama dalam Anuitas

Bunga pada pembayaran pertama dapat dihitung dengan:

$$B_1 = P \times r$$

Bunga pada pembayaran pertama dapat dihitung dengan:

Contoh Soal Anuitas

Seseorang meminjam uang sebesar Rp100.000.000,00 dengan suku bunga 12% per tahun selama 5 tahun. Pembayaran dilakukan di akhir setiap tahun (anuitas postnumerando). Hitung besar anuitas yang harus dibayarkan setiap tahun.

Pembahasan:

Diketahui:

Nilai pinjaman (P) = Rp100.000.000,00

Suku bunga tahunan (r) = 12% = 0,12

Jumlah periode (n) = 5 tahun

Gunakan rumus anuitas:

$$\boldsymbol{A = P \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}}$$

$$A = 100.000.000 \times \frac{0{,}12(1+0{,}12)^5}{(1+0{,}12)^5 - 1}$$

$$A = 100.000.000 \times \frac{0{,}12(1{,}7623)}{(1{,}7623) - 1}$$

$$A = 100.000.000 \times \frac{0{,}211476}{0{,}7623}$$

$$A = 100.000.000 \times 0{,}27745 = Rp27.745.000{,}00$$

Jawaban: Besar anuitas yang harus dibayarkan setiap tahun adalah Rp27.745.000,00.

c. Rumus Nilai Anuitas: Hubungan Anuitas dengan Angsuran Pertama

Rumus untuk menghitung hubungan antara anuitas (A) dan angsuran pertama (P_1) adalah:

$$P_1 = A - B_1$$

Di mana:

P_1 = Angsuran pokok pada periode pertama

A = Besar anuitas

B_1 = Bunga pada periode pertama

Contoh Soal Hubungan Anuitas dengan Angsuran Pertama

Dengan besar anuitas A = Rp27.745.000,00, bunga pada periode pertama B_1 = Rp12.000.000,00:

Gunakan rumus:

$$\boldsymbol{P_1 = A - B_1}$$

$$P_1 = 27.745.000 - 12.000.000 = Rp15.745.000{,}00$$

Jawaban: Angsuran pokok pada periode pertama adalah Rp15.745.000,00.

Sisa Pinjaman Anuitas

Sisa pinjaman anuitas adalah jumlah pinjaman yang masih harus dilunasi setelah beberapa kali pembayaran dilakukan. Sisa pinjaman ini mencerminkan pokok pinjaman yang belum terbayar, dengan bunga yang dihitung ulang sesuai sisa tersebut.

a. Metode Menghitung Sisa Pinjaman

1) Mengurangi total angsuran pokok yang telah dibayarkan dari jumlah pinjaman awal.

2) Menggunakan rumus sisa pinjaman secara langsung.

b. Rumus Sisa Pinjaman Anuitas

Berikut adalah rumus untuk menghitung sisa pinjaman setelah k periode:

$$P_k = A \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^k}{r}$$

Di mana:

P_k = Sisa pinjaman setelah k periode

A = Besar anuitas

r = Suku bunga per periode

n = Jumlah total periode

k = Jumlah periode yang telah dilalui

Contoh Soal Sisa Pinjaman Anuitas

Seseorang meminjam Rp120.000.000,00 dengan suku bunga 10% per tahun selama 4 tahun. Besar anuitas yang harus dibayar setiap tahun adalah Rp38.186.000,00. Berapa sisa pinjaman setelah 2 tahun?

Pembahasan:

Diketahui:

A = Rp38.186.000,00

r = 10% = 0,10

n = 4

k = 2

Gunakan rumus sisa pinjaman:

$$\boldsymbol{P_k = A \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^k}{r}}$$

Subtitusi nilai:

$$P_2 = 38.186.000 \times \frac{(1+0{,}10)^4 - (1+0{,}10)^2}{0{,}10}$$

$$P_2 = 38.186.000 \times \frac{(1{,}10)^4 - (1{,}10)^2}{0{,}10}$$

$$P_2 = 38.186.000 \times \frac{1{,}4641 - 1{,}21}{0{,}10}$$

$$P_2 = 38.186.000 \times \frac{0{,}2541}{0{,}10}$$

$$P_2 = 38.186.000 \times 2{,}541 = Rp97.108.226{,}00$$

Jawaban: Sisa pinjaman setelah 2 tahun adalah Rp97.108.226,00.

c. Penjelasan Tambahan

Sisa pinjaman mencerminkan pokok pinjaman yang masih harus dilunasi setelah beberapa kali pembayaran. Perhitungan ini penting untuk memahami bagaimana bunga dan angsuran pokok berubah seiring waktu.

d. Metode Alternatif

Selain menggunakan rumus langsung, sisa pinjaman juga dapat dihitung dengan mengurangi total angsuran pokok yang telah dibayarkan dari jumlah pinjaman awal.

Anuitas yang Dibulatkan

Dalam praktik keuangan, anuitas sering kali tidak dihitung dengan nilai decimal yang presisi. Metode pembulatan dipilih berdasarkan kebijakan keuangan lembaga atau preferensi peminjam. Pembulatan kecil sering kali tidak signifikan dalam jumlah total pinjaman besar, tetapi penting untuk menghitung secara tepat agar tidak ada kekurangan pembayaran. Untuk mempermudah pembayaran, besar anuitas biasanya dibulatkan ke atas atau ke bawah sesuai kebutuhan. Pembulatan ini memengaruhi distribusi bunga dan pokok pinjaman, tetapi tidak mengubah total kewajiban yang harus dibayarkan. Berikut adalah penjelasan lebih lanjut mengenai dua jenis pembulatan dalam anuitas.

a. Anuitas yang Dibulatkan ke Atas

Pembulatan ke atas dilakukan untuk memastikan bahwa total pembayaran mencukupi seluruh kewajiban pinjaman, termasuk bunga dan pokok. Hal ini sering digunakan untuk menghindari adanya sisa pinjaman kecil yang belum terbayar di akhir periode. Besar anuitas dapat dibulatkan ke atas dalam puluhan, ratusan, ribuan, puluh ribuan, atau seterusnya. Angka pada tempat yang dibulatkan selalu bertambah satu dari sebelumnya. Lambang untuk pembulatan anuitas ke atas adalah A^+.

▷ **Dampak Pembulatan pada Total Pembayaran jika Dibulatkan ke Atas**

Total pembayaran selama periode biasanya akan lebih besar dari kewajiban total sebenarnya, tetapi ini memastikan kewajiban terbayar penuh lebih awal.

▷ **Proses Pembulatan ke Atas**

Jika terdapat kondisi $a_1 = A^+ - b_1 = A^+ - M \times i$, maka kelebihan pembayaran dari semua angsuran dapat dinyatakan dengan Nilai Lebih (NL) berikut:

$$NL = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_t) - M$$

$$= (a_1 + a_1(1+i) + a_1(1+i)^2 + a_1(1+i)^3 + \dots + a_1(1+i)^{t-1}) - M$$

(Catatan: Ini adalah deret geometri dengan suku pertama a_1 dan rasio $(1+i)$)

$$= \boldsymbol{a_1\left(\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right) - M}$$

Jika kelebihan tiap anuitas $L = A^+ - A$, maka kelebihan pembayaran dari semua angsuran dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$NL = L + L(1+i) + L(1+i)^2 + L(1+i)^3 + \dots + L(1+i)^{t-1}$$

(Catatan: Ini adalah deret geometri dengan suku pertama L dan rasio $(1+i)$)

$$= \boldsymbol{L\left(\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right)}$$

Jadi, kelebihan pembayaran dari semua angsuran dapat dihitung menggunakan rumus tersebut. Sedangkan, besar anuitas akhir dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$A_t = A^+ - NL$$

▷ **Proses Pembulatan ke Atas ke Ribuan Terdekat**

$$A_{dibulatkan\ ke\ atas} = \left\lceil \frac{A_{asli}}{1000} \right\rceil \times 1000$$

Keterangan:

Digunakan untuk memastikan total kewajiban mencukupi seluruh pembayaran selama periode.

A_{asli} = Anuitas yang dihitung sebelum pembulatan (dengan angka desimal penuh).

⌈x⌉: Operasi pembulatan ke atas, di mana nilai desimal dinaikkan ke angka utuh terdekat atau kelipatan tertentu (contoh: ke ribuan terdekat).

Contoh Penerapan Rumus Anuitas yang Dibulatkan ke Atas

Diketahui A_{asli} = Rp41.026.736,84

Pembahasan:

$$A_{dibulatkan\ ke\ atas} = \left\lceil \frac{41.026.736{,}84}{1000} \right\rceil \times 1000$$

$$\boldsymbol{A_{dibulatkan\ ke\ atas} = \lceil 41.026{,}73684 \rceil \times 1000 = 41.027 \times 1.000 = Rp41.027.000{,}00}$$

b. Anuitas yang Dibulatkan ke Bawah

Pembulatan ke bawah dilakukan untuk mendekati nilai anuitas sebenarnya. Dalam hal ini, sering kali sisa kewajiban kecil akan tetap ada di akhir periode dan harus dilunasi sebagai pembayaran terakhir. Besar anuitas juga dapat dibulatkan ke bawah dalam puluhan, ratusan, ribuan, puluh ribuan, atau seterusnya. Angka pada tempat yang dibulatkan selalu tetap. Lambang untuk pembulatan anuitas ke bawah adalah A^{-}.

▷ **Dampak Pembulatan pada Total Pembayaran jika Dibulatkan ke Bawah**

Akan ada sedikit sisa kewajiban yang belum terbayar di akhir periode, yang perlu dilunasi dengan pembayaran tambahan.

▷ **Proses Pembulatan ke bawah**

Jika terdapat kondisi $a_1 = A^{-} - b_1 = A^{-} - M \times i$, maka kekurangan pembayaran dari semua angsuran dapat dinyatakan dengan Nilai Kurang (NK) berikut:

NK $= M - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_t)$

$= M - (a_1 + a_1(1+i) + a_1(1+i)^2 + a_1(1+i)^3 + \ldots + a_1(1+i)^{t-1})$

(Catatan: Ini adalah deret geometri dengan suku pertama a_1 dan rasio $(1+i)$

$= M - a_1\left(\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right)$

Jika kekurangan tiap anuitas $K = A - A^{-}$, maka kekurangan pembayaran dari semua angsuran dapat dinyatakan sebagai berikut:

NK $= K + K(1+i) + K(1+i)^2 + K(1+i)^3 + \ldots + K(1+i)^{t-1}$

(Catatan: Ini adaKah deret geometri dengan suku pertama K dan rasio $(1+i)$

$= K\left(\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right)$

Jadi, kekurangan pembayaran dari semua angsuran dapat dihitung menggunakan rumus tersebut. Sedangkan, besar anuitas akhir dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$A_t = A^{-} + NK$$

- ▷ **Proses Pembulatan ke Bawah ke Ribuan Terdekat:**

$$A_{dibulatkan\ ke\ bawah} = \left\lfloor \frac{A_{asli}}{1000} \right\rfloor \times 1000$$

Keterangan:

Digunakan untuk mendekati nilai asli tanpa kelebihan pembayaran, meskipun sering kali menghasilkan sisa kewajiban kecil di akhir periode.

A_{asli} = Anuitas yang dihitung sebelum pembulatan (dengan angka desimal penuh).

$\lfloor x \rfloor$= Operasi pembulatan ke bawah, di mana nilai desimal diturunkan ke angka utuh terdekat atau kelipatan tertentu (contoh: ke ribuan terdekat).

Contoh Penerapan Rumus Anuitas yang Dibulatkan ke Bawah

Diketahui A_{asli} = Rp31.468.291,37.

Pembahasan:

$$A_{dibulatkan\ ke\ bawah} = \left\lfloor \frac{31.468.291{,}37}{1000} \right\rfloor \times 1000$$

$$\boldsymbol{A_{dibulatkan\ ke\ atas} = \lfloor 31.468{,}29137 \rfloor \times 1000 = 31.468 \times 1.000 = Rp31.468.000{,}00}$$

Tabel Pelunasan Anuitas

a. Definisi Tabel Pelunasan Anuitas

Tabel pelunasan anuitas adalah tabel yang menunjukkan detail pembayaran anuitas untuk setiap periode, termasuk rincian jumlah bunga, pokok pinjaman yang dibayar, dan sisa pinjaman setelah setiap pembayaran. Tabel ini berguna untuk memahami distribusi angsuran selama masa pinjaman.

b. Manfaat Tabel Pelunasan Anuitas

- ▷ Transparansi: Memberikan gambaran jelas mengenai distribusi bunga dan pokok dalam setiap pembayaran.
- ▷ Perencanaan Keuangan: Membantu peminjam merencanakan anggaran dengan lebih baik.
- ▷ Evaluasi Pelunasan: Mempermudah pelacakan sisa pinjaman dan pembayaran yang sudah dilakukan.

c. Struktur Tabel Pelunasan Anuitas

Tabel pelunasan anuitas umumnya terdiri dari kolom-kolom berikut:

1) Periode: Menunjukkan urutan pembayaran (misalnya, tahun 1, tahun 2, dst.).

2) Bunga (B_t): Bunga yang harus dibayar pada periode tersebut, dihitung berdasarkan sisa pinjaman.

$$B_t = P_{t-1} \times$$

Di mana:

P_{t-1} = Sisa pinjaman sebelum pembayaran pada periode t

r = Suku bunga per periode

3) Pokok (P_t): Bagian dari pembayaran yang digunakan untuk mengurangi pokok pinjaman.

$$P_t = A - B_t$$

Di mana A adalah besar anuitas.

4) Sisa Pinjaman (P_t): Jumlah pinjaman yang tersisa setelah pembayaran pada periode.

$$P_t = P_{t-1} - P_t$$

5) Total Pembayaran: Biasanya tetap konstan untuk setiap periode, yaitu besar anuitas A.

d. Contoh Bentuk Tabel Pelunasan Anuitas

Tahun Ke-	Pinjaman Awal Tahun (Rp)	Anuitas yang Dibulatkan		Sisa Pinjaman Akhir Tahun (Rp)
		Bunga (Rp)	Angsuran (Rp)	
1				
2				
3				
dst.				

Keterangan Tabel

▷ Pinjaman awal tahun ke-2 = sisa pinjaman akhir tahun ke-1, pinjaman awal tahun ke-3 = sisa pinjaman akhir tahun ke-2, dan seterusnya.

▷ Setiap periode, bunga + angsuran = anuitas hasil pembulatan, kecuali pada baris terakhir.

▷ Sisa pinjaman akhir tahun ke-1 = pinjaman awal tahun ke-1 - angsuran ke-1, sisa pinjaman akhir tahun ke-2 = pinjaman awal tahun ke-2 - angsuran ke-2, dan seterusnya.

▷ Angsuran terakhir = pinjaman awal tahun terakhir.

Contoh Soal Tabel Pelunasan Anuitas

Pinjaman sebesar Rp80.000.000,00 akan dilunasi dengan anuitas tahunan selama 4 tahun. Jika suku bunga 10% per tahun dan pembayaran anuitas dibulatkan ke bawah dalam ratus ribuan:

a. Tentukan besar anuitas sebelum dan sesudah dibulatkan.

b. Buatlah tabel rencana pelunasan anuitas.

c. Tentukan pembayaran anuitas terakhir.

Pembahasan:

Diketahui:

P = Rp80.000.000

r = 10% per tahun = 0,10

n = 4 tahun

a. Menentukan besar anuitas (A):

Gunakan rumus anuitas:

$$A = P \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$A = 80.000.000 \times \frac{0{,}10(1+0{,}10)^4}{(1+0{,}10)^4 - 1}$$

$$A = 80.000.000 \times \frac{0{,}14641}{0{,}4641}$$

$$A = 80.000.000 \times 0{,}31544 = 25.235.200$$

Anuitas dibulatkan ke bawah dalam ratus ribuan:

A^- = Rp25.200.000,00

b. Tabel Rencana Pelunasan Anuitas

Gunakan nilai A^{-} = Rp25.200.000,00. Setiap tahun, bunga dihitung berdasarkan sisa pinjaman, dan angsuran pokok adalah selisih antara anuitas dan bunga.

Tahun Ke-	Pinjaman Awal Tahun (Rp)	Anuitas yang Dibulatkan (A^{-})		Sisa Pinjaman Akhir Tahun (Rp)
		Bunga (Rp)	Angsuran (Rp)	
1	80.000.000,00	8.000.000,00	17.200.000,00	62.800.000,00
2	62.800.000,00	6.280.000,00	18.920.000,00	43.880.000,00
3	43.880.000,00	4.388.000,00	20.812.000,00	23.068.000,00
4	23.068.000,00	2.306.800,00	22.893.200,00	0,00

c. Pembayaran Anuitas Terakhir

Anuitas Terakhir = Sisa Pinjaman Awal Tahun Terakhir + Bunga Tahun Terakhir

23.068.000,00 + 2.306.800,00 = 25.374.800,00

Tabel Pelunasan Anuitas

a. Pengertian Anuitas Pinjaman Obligasi

Pernahkah mendengar istilah obligasi? Jangan sampai salah mengartikan obligasi sebagai saham, karena keduanya berbeda. Masyarakat yang paham investasi mungkin sudah akrab dengan istilah ini, tetapi masih banyak yang belum benar-benar memahami konsep obligasi. Padahal, obligasi bisa menjadi instrumen investasi yang menawarkan keuntungan menarik. Obligasi adalah surat berharga yang berisi perjanjian pinjaman tertulis.

Apabila jumlah angsuran bukan merupakan kelipatan dari nilai nominal obligasi, maka sisa yang tidak sesuai kelipatan akan dibayarkan pada periode anuitas berikutnya. Besar angsuran untuk pinjaman obligasi dapat dihitung menggunakan rumus anuitas, yang sudah dijelaskan pada bagian sebelumnya.

Biasanya, obligasi diterbitkan oleh perusahaan atau pemerintah untuk mendapatkan dana dalam jumlah besar. Dalam dokumen obligasi, terdapat informasi penting seperti:

- ▷ Tanggal penerbitan,
- ▷ Nilai nominal,
- ▷ Tingkat bunga,
- ▷ Tanggal jatuh tempo, dan
- ▷ Nilai emisi.

Jika pinjaman obligasi dilunasi menggunakan sistem anuitas, maka nilai nominal obligasi biasanya dipecah menjadi unit-unit yang lebih kecil. Misalnya, jika nilai total pinjaman obligasi adalah Rp100.000.000,00, obligasi ini dapat dipecah menjadi nominal Rp100.000,00 per unit, sehingga jumlah obligasi yang diterbitkan adalah 1.000 lembar.

b. Manfaat Anuitas Pinjaman Obligasi

- ▷ Konsistensi Pembayaran: Membantu pengelolaan arus kas perusahaan dengan jumlah pembayaran tetap.
- ▷ Pengurangan Beban Bunga: Seiring dengan berkurangnya saldo, jumlah bunga yang harus dibayar juga berkurang.
- ▷ Transparansi Pelunasan: Memudahkan peminjam dan pemberi pinjaman untuk melacak kewajiban finansial.

Pojok Matematika

Fakta Tersembunyi di Balik Cicilan Rumah Jangka Panjang

Jika mencicil rumah selama 15 tahun bisa bikin kamu bayar hampir dua kali lipat dari harga rumah aslinya. Misalnya, rumah seharga Rp500 juta dengan bunga 10% per tahun dan sistem anuitas, total pembayaranmu bisa tembus Rp900 jutaan! Karena cicilan bulanan selalu tetap, kita sering nggak sadar kalau setengah dari yang kita bayar itu sebenarnya cuma buat bunganya, alias uang yang langsung masuk ke bank, bukan ke nilai rumahnya.

Rangkuman

Berbagai konsep dasar yang berkaitan dengan perhitungan keuangan diperkenalkan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang bagaimana uang, bunga, dan pembayaran dapat dikelola secara efektif. Berikut adalah poin-poin kesimpulan dari materi yang telah dibahas:

1) Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk:

   ▷ Bunga Tunggal dihitung berdasarkan modal awal tanpa memperhitungkan bunga yang sudah terbentuk sebelumnya. Ini cocok untuk pinjaman atau simpanan sederhana dalam jangka waktu tertentu.

   ▷ Bunga Majemuk memungkinkan bunga yang diperoleh pada setiap periode bertambah ke modal awal, sehingga menghasilkan bunga yang terus meningkat. Bunga ini sering digunakan dalam investasi jangka panjang.

   ▷ Rumus:

   - Bunga Tunggal: $B = M \times r \times t$
   - Bunga Majemuk: $A = M \times (1 + r)^t$

2) Persen di Atas Seratus dan Persen di Bawah Seratus:

   ▷ Persen di atas seratus digunakan untuk menghitung pertumbuhan nilai, seperti keuntungan atau kenaikan harga.

   ▷ Persen di bawah seratus digunakan untuk menghitung pengurangan nilai, seperti diskon atau kerugian.

   ▷ Rumus:

   - Persen di atas 100% (menunjukkan peningkatan):

$$\text{Nilai Akhir} = \text{Nilai Awal} \times \left(1 + \frac{\text{Persentase}}{100}\right)$$

   - Persen di bawah 100% (menunjukkan penurunan):

$$\text{Nilai Akhir} = \text{Nilai Awal} \times \left(1 - \frac{\text{Persentase}}{100}\right)$$

3) Bunga Tunggal dan Diskonto:

   ▷ Bunga tunggal mencakup berbagai metode perhitungan seperti metode pembagi tetap, persen yang sebanding, dan persen yang seukuran.

   ▷ Diskonto digunakan untuk menghitung potongan dari nilai nominal pinjaman yang diterima lebih awal, dengan metode perhitungan berdasarkan waktu tertentu.

   ▷ Rumus:

   - Bunga Tunggal: $B = M \times r \times t$
   - Diskonto: $D = M \times r \times t$

   (Rumus sama karena hanya cara penggunaannya yang berbeda)

4) Rente:

   ▷ Rente adalah serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan untuk pinjaman atau investasi. Terdapat berbagai jenis rente seperti:

   ▷ Berdasarkan waktu pembayaran (pranumerando dan postnumerando),

   ▷ Berdasarkan durasi pembayaran (rente terbatas dan rente kekal).

- ▷ Nilai tunai dan nilai akhir dari rente dihitung menggunakan rumus yang berbeda tergantung jenis rente tersebut.
- ▷ Rumus:
    - Rente Postnumerando (akhir periode):

$$S = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

    - Rente Pranumerando (awal periode):

$$S = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (1+r)$$

5) Anuitas:
- ▷ Anuitas adalah serangkaian pembayaran tetap yang dilakukan secara berkala. Anuitas digunakan untuk menghitung cicilan pinjaman atau pembayaran investasi.
- ▷ Tabel pelunasan anuitas menunjukkan distribusi pembayaran bunga dan pokok dalam setiap periode hingga pinjaman lunas.
- ▷ Dalam praktiknya, anuitas sering dibulatkan untuk mempermudah pembayaran, baik ke atas maupun ke bawah, yang memengaruhi sisa kewajiban atau pembayaran akhir.
- ▷ Rumus besar anuitas:

$$\boldsymbol{A = P \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}}$$

6) Pinjaman Obligasi:
- ▷ Obligasi adalah surat berharga yang diterbitkan untuk mengumpulkan dana dalam jumlah besar, biasanya dilunasi dengan sistem anuitas.
- ▷ Pinjaman obligasi dapat dipecah menjadi nominal kecil yang disebut lembar obligasi, dan pembayaran dilakukan secara berkala sesuai dengan sistem yang telah dirancang.
- ▷ Rumus:

  Gunakan rumus anuitas yang sama seperti di poin 5 karena pelunasan obligasi bisa dilakukan dengan sistem anuitas:

$$\boldsymbol{A = P \times \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}}$$

7) Nilai Tunai dan Akumulasi:
- ▷ Perhitungan nilai tunai (*present value*) dan nilai akumulasi (*future value*) menjadi dasar untuk memahami pembayaran yang dilakukan di masa sekarang maupun di masa depan, termasuk pembayaran tepat waktu, tertunda, atau dilakukan dalam jumlah tertentu.
- ▷ Rumus:
    - Nilai Akumulasi (Bunga Majemuk): $A = M \times (1+r)^t$
    - Nilai Tunai (Present Value): $M = \frac{A}{(1+r)^t}$

Latihan Soal

1. Apa perbedaan utama antara bunga tunggal dan bunga majemuk?
    a. Bunga tunggal dihitung setiap hari, bunga majemuk hanya tahunan
    b. Bunga tunggal tidak mempertimbangkan waktu, bunga majemuk mempertimbangkan waktu
    c. Bunga tunggal tidak memperhitungkan bunga sebelumnya, sedangkan bunga majemuk memperhitungkan bunga sebelumnya
    d. Bunga tunggal hanya untuk pinjaman besar, bunga majemuk hanya untuk investasi kecil
    e. Bunga majemuk tidak menghasilkan bunga tambahan
2. Apa fungsi utama dari konsep diskonto dalam keuangan?
    a. Menentukan jumlah bunga yang diperoleh dari investasi
    b. Menghitung pertumbuhan nilai simpanan
    c. Menentukan besar cicilan bulanan
    d. Menghitung potongan dari nilai nominal pinjaman yang diterima lebih awal
    e. Mengurangi nilai akhir investasi
3. Dalam sistem rente postnumerando, kapan pembayaran dilakukan?
    a. Di awal setiap periode
    b. Di pertengahan periode
    c. Di akhir setiap periode
    d. Secara acak
    e. Setelah masa pinjaman berakhir
4. Apa yang dimaksud dengan anuitas dalam perhitungan keuangan?
    a. Pembayaran tidak tetap yang dilakukan saat diperlukan
    b. Pembayaran tetap yang dilakukan secara berkala
    c. Pembayaran besar di awal masa pinjaman
    d. Pembayaran yang hanya mencakup bunga saja
    e. Pembayaran berdasarkan pendapatan bulanan
5. Manakah dari berikut ini yang merupakan karakteristik pinjaman obligasi?
    a. Tidak memiliki bunga
    b. Tidak bisa dipecah dalam bentuk lembar
    c. Pelunasannya hanya dilakukan sekali saja
    d. Biasanya dilunasi dengan sistem anuitas
    e. Hanya dilakukan oleh individu, bukan perusahaan
6. Hitung bunga tunggal dari pinjaman sebesar Rp10.000.000 dengan tingkat bunga 6% per tahun selama 3 tahun.
    a. Rp1.600.000
    b. Rp1.800.000
    c. Rp2.000.000
    d. Rp2.200.000
    e. Rp2.400.000
7. Seorang investor menanamkan dana sebesar Rp5.000.000 selama 4 tahun dengan bunga majemuk 8% per tahun. Berapa nilai akhir investasinya?
    a. Rp6.804.000
    d. Rp6.000.000

b. Rp6.500.000

c. Rp6.200.000

e. Rp5.800.000

8. Jika seseorang ditawari dua pilihan: menerima Rp50.000.000 hari ini atau Rp60.000.000 dua tahun lagi dengan bunga majemuk 9% per tahun, mana yang lebih menguntungkan?

   a. Rp50.000.000 hari ini
   b. Rp60.000.000 dua tahun lagi
   c. Nilainya sama
   d. Tergantung pada inflasi
   e. Tidak dapat ditentukan

9. Seorang debitur membayar cicilan bulanan sebesar Rp1.000.000 dengan tingkat bunga 10% per tahun selama 2 tahun. Hitung jumlah pinjaman awal menggunakan rumus anuitas.

   a. Rp20.000.000
   b. Rp21.500.000
   c. Rp21.578.000
   d. Rp22.000.000
   e. Rp23.000.000

10. Seorang investor ingin memiliki Rp100.000.000 dalam waktu 5 tahun. Berapa yang harus diinvestasikan sekarang jika bunga majemuk adalah 7% per tahun?

   a. Rp71.200.000
   b. Rp72.500.000
   c. Rp73.500.000
   d. Rp75.100.000
   e. Rp76.300.000

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 12 BAB 1

Referensi

Brigham, Eugene F., dan Houston, Joel F. (2015). Fundamentals of Financial Management. 14th Edition. Cengage Learning: Boston.

Purcell, Edwin J. (2007). Mathematics of Finance. Prentice Hall: New Jersey.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI. (2018). Modul Matematika SMA Kurikulum 2013 Revisi. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan.

Investopedia. (n.d.). "Understanding Simple Interest and Compound Interest." Diakses dari: https://www.investopedia.com.

Khan Academy. (n.d.). "Finance and Capital Markets." Diakses dari: https://www.khanacademy.org.

BAB 2:

TRANSFORMASI FUNGSI

Karakter Pelajar Pancasila

- **Mandiri**

  Paham tentang transformasi fungsi untuk memecahkan masalah matematika secara mandiri, serta mampu mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah yang melibatkan grafik fungsi dalam berbagai bentuk transformasi.

- **Bernalar Kritis**

  Mampu menganalisis perubahan pada grafik fungsi yang terjadi akibat transformasi seperti translasi, refleksi, rotasi,

Kata Kunci: Translasi (Pergeseran), Refleksi (Pencerminan), Rotasi (Perputaran), Dilatasi,

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Grafik Melalui Transformasi

1. **Menganalisis dan menyelesaikan masalah translasi fungsi**
   - Mengidentifikasi bentuk fungsi yang mengalami translasi baik ke kiri, ke kanan, ke atas, maupun ke bawah, berdasarkan perubahan pada persamaan fungsinya.
   - Menentukan grafik fungsi hasil translasi dengan tepat, serta menjelaskan perubahan posisi grafik terhadap fungsi asal.

2. **Menyelesaikan masalah terkait transformasi pencerminan (refleksi) terhadap garis x = k, y= h sumbu X, sumbu Y, y = x atau y=−x.**
   - Menerapkan rumus refleksi terhadap sumbu dan garis tertentu untuk menentukan bayangan dari suatu titik atau grafik.
   - Memahami perubahan bentuk fungsi hasil refleksi dari arah serta posisi grafiknya.

3. **Memecahkan masalah rotasi fungsi dengan pusat rotasi O (0, 0) dan sudut putar 90°, 180°, atau 270°, baik searah alau berlawanan arah jarum jam**
   - ▷ Mengetahui aturan rotasi untuk sudut 90°, 180°, atau 270°, serta dapat menerapkannya untuk mentransformasikan titik-titik pada grafik fungsi.
   - ▷ Menentukan persamaan bayangan grafik fungsi hasil rotasi dan menggambarkannya, baik untuk rotasi searah maupun berlawanan arah jarum jam.

4. **Mendeskripsikan prinsip dilatasi grafik fungsi dengan pusat O (0, 0) dan faktor skala k**
   - ▷ Menerapkan dilatasi dengan faktor skala tertentu pada suatu fungsi, serta menuliskan bentuk baru dari fungsi tersebut.
   - ▷ Menjelaskan dampak perubahan skala terhadap bentuk, arah, dan lebar/kemiringan grafik fungsi, baik dalam bentuk parabola, garis lurus, maupun fungsi lainnya.

1. Translasi (Pergeseran)

Atlet Lompat Jauh Mengalami Translasi (Perpindahan) – Freepik.com

Translasi merupakan salah satu jenis transformasi geometri yang menggeser seluruh titik dalam suatu objek (misalnya bangun datar atau grafik fungsi) sejauh jarak tertentu dalam arah tertentu. Translasi tidak mengubah bentuk atau ukuran objek, hanya posisinya saja yang berubah. Dalam konteks matematika, translasi sering diterapkan pada grafik fungsi seperti fungsi linear, kuadrat, atau absolut. Pergeseran ini bisa terjadi ke atas, ke bawah, ke kanan, atau ke kiri.

Secara umum, jika titik (x, y) ditranslasi oleh T = $\binom{a}{b}$, dengan a = nilai pergeseran ke kanan (+) atau ke kiri (−) dan b = nilai pergeseran ke atas (+) atau ke bawah (−), maka hasilnya disebut sebagai bayangan (x', y'), yaitu sebagai berikut.

$$(x, y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}} (x', y') = (x + a, y + b)$$

Persamaan x' = x + a dan y' = y + b dapat ditulis dalam bentuk x = x' – a dan y' = y – b. Bentuk tersebut kemudian disubstisukan ke persamaan fungsi y = f(x), sehingga jika hasil translasi adalah y' = g(x), maka diperoleh sebagai berikut.

$$y' - b = f(x' - a) \text{ atau } y' = f(x' - a) + b \text{ atau } g(x) = f(x - a) + b$$

Dengan demikian, apabila fungsi f(x) ditranslasi oleh $\binom{a}{b}$, maka bayangannya dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$g(x) = f(x - a) + b$$

Dalam fungsi awal y = f(x), jika a > 0 dan b > 0 maka:

1) y = f(x – a), menggeser y = f(x) sejauh a ke kanan,
2) y = f(x + a), menggeser y = f(x) sejauh a ke kiri,
3) y = f(x) + b, menggeser y = f(x) sejauh b ke atas,
4) y = f(x) – b, menggeser y = f(x) sejauh b ke bawah.

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan bayangan dari fungsi linear $f(x) = 2x + 8$ jika digeser sejauh $T = \binom{3}{2}$.

   Penyelesaian:

   Berdasarkan aturan translasi, $T = \binom{3}{2}$ berarti fungsi f(x) digeser sejauh 3 satuan ke kanan dan 2 satuan ke atas, sehingga diperoleh:

   $y = f(x - 3) + 2$

   $y = 2(x - 3) + 8 + 2$

   $y = 2x - 6 + 8 + 2$

   $y = 2x + 4$

   Jadi, persamaan bayangan dari fungsi linear tersebut adalah $y = 2x + 4$.

2. Sebuah fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 5$ digeser sejauh 1 satuan ke kanan dan 2 satuan ke bawah. Tentukan persamaan bayangan hasil pergeseran tersebut.

   Penyelesaian:

   Fungsi kuadrat tersebut digeser 1 satuan ke kanan dan 2 satuan ke bawah, maka matriks translasinya adalah $\binom{1}{-2}$. Berdasarkan aturan translasi diperoleh:

   $y = f(x - 1) - 2$

   $y + 2 = f(x - 1)$

   $= (x - 1)^2 - 4(x - 1) + 5$

   $= x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 + 5$

   $= x^2 - 6x + 10$

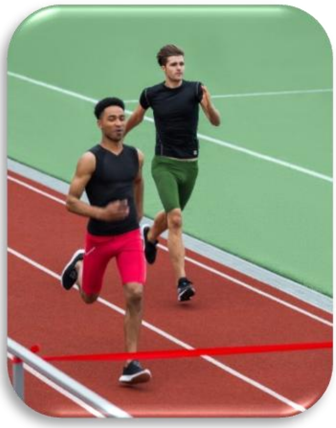
   $y = x^2 - 6x + 8$

   Jadi, persamaan bayangan hasil persamaan tersebut adalah $y = x^2 - 6x + 8$.

Pojok Matematika

Pergerakan Atlet Olahraga

- ▷ Saat atlet berlari atau melompat, tubuh mereka mengalami translasi, yaitu perpindahan dalam garis lurus atau melengkung. Gerakan ini dapat dianalisis menggunakan konsep kecepatan dan percepatan untuk meningkatkan efisiensi dan performa atlet.
- ▷ Beberapa faktor yang mempengaruhi diantaranya seperti gaya dorong, sudut tolakan, dan hambatan udara. Misalnya, dalam lompat jauh sudut dan kecepatan awal sangat menentukan sejauh mana atlet dapat melompat.
- ▷ Pelatih dan ilmuwan olahraga menggunakan sensor gerak dan analisis video untuk mempelajari translasi atlet. Dengan data ini, mereka dapat menyempurnakan teknik lari atau lompat, mengurangi risiko cedera, dan meningkatkan performa secara keseluruhan.



2. Refleksi (Pencerminan)

Refleksi atau pencerminan adalah transformasi geometri yang memindahkan setiap titik dari sebuah objek ke posisi baru dengan jarak yang sama terhadap suatu garis tertentu, tetapi berada di sisi yang berlawanan. Objek yang dicerminkan dapat berupa fungsi atau kurva. Suatu fungsi atau kurva dapat direfleksikan terhadap garis dengan persamaan x = h dan y = k, sumbu koordinat, serta garis lain sebagai fungsi linear.

Refleksi Cermin – Freepik.com

Refleksi terhadap Garis x = h dan y = k

Untuk menerapkan aturan refleksi fungsi terhadap garis x = h dan y = k, dapat dipilih sebuah titik (x, y) pada fungsi tersebut.

a. Refleksi terhadap garis x = h

Refleksi terhadap garis x = h berarti mencerminkan suatu titik atau grafik terhadap sebuah garis vertikal yang sejajar dengan sumbu y dan terletak pada x = h. Setiap titik (x, y) akan dipantulkan ke titik lain dengan jarak yang sama dari garis x = h, tetapi di sisi yang berlawanan. Dapat disimpulkan bahwa nilai y tetap dan posisi x berubah.

Fungsi f(x) yang melalui titik (x, y) direfleksikan terhadap garis x = h, maka bayangannya adalah y = g(x) yang dapat difenisikan dengan persamaan:

$$g(x) = f(2h - x)$$

b. Refleksi terhadap garis y = k

Refleksi terhadap garis y = k mencerminkan titik atau grafik terhadap garis horizontal sejajar dengan sumbu x, pada posisi y = k. Dalam hal ini, nilai x tetap, sedangkan nilai y berubah. Fungsi f(x) yang melalui titik (x, y) direfleksikan terhadap garis x = k, maka bayangannya adalah y = g(x) yang dapat difenisikan dengan persamaan:

$$g(x) = 2k - f(x)$$

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan bayangan dari fungsi linear $f(x) = 2x + 6$ jika direfleksikan terhadap:
   a. garis $x = 2$,
   b. garis $y = 2$.

   Penyelesaian:

   a. Berdasarkan aturan refleksi terhadap $x = h$ maka diperoleh $g(x) = h\ f(2h - x)$. Untuk refleksi terhadap garis $x = 2$, maka $g(x) = f(4 - x)$.

   $g(x) = f(4 - x)$

   $= 2(4 - x) + 6$

   $= -8x + 8 + 6$

   $= -8x + 14$

   Jadi, persamaan bayangannya adalah $g(x) = -8x + 14$.

   b. Berdasarkan aturan refleksi terhadap $y = k$, maka diperoleh $g(x) = 2k - f(x)$. Untuk refleksi terhadap garis $y = 2$, maka $g(x) = 4 - f(x)$.

   $g(x) = 4 - f(x)$

   $= 4 - (2x + 6)$

   $= 4 - 2x - 6$

   $= -2x - 2$

   Jadi, persamaan bayangannya adalah $g(x) = -2x - 2$.

2. Sebuah fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ direfleksikan terhadap garis $y = k$, sehingga bayangannya adalah $g(x) = -x^2 + 4x - 9$. Tentukan nilai k.

   Penyelesaian:

   Berdasarkan aturan refleksi terhadap $y = k$, maka diperoleh $g(x) = 2k - f(x)$.

   $g(x) = 2k - f(x)$

   $= 2k - (x^2 - 4x + 3)$

   $= 2k - x^2 + 4x - 3$

   $= -x^2 + 4x + 2k - 3$

   Dengan demikian, bayangan $g(x) = -x^2 + 4x - 9 = g(x) = -x^2 + 4x + 2k - 3$, sehingga diperoleh:

   $2k - 3 = -9$

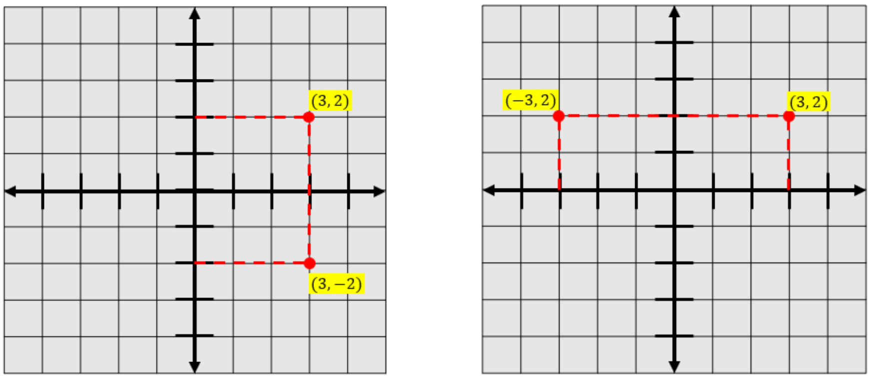
   $2k = -6$

   $k = -3$

   Jadi, nilai k adalah -3.

Refleksi terhadap Sumbu X dan Sumbu Y

Untuk menerapkan aturan refleksi fungsi terhadap sumbu X dan sumbu Y, dapat dipilih sebuah titik (x, y) pada fungsi tersebut. Perhatikan gambar berikut.



Ilustrasi Refleksi terhadap Sumbu X dan Sumbu Y – Zenius.net

Titik (3, 2) dicerminkan terhadap sumbu X, sehingga menghasilkan bayangan (3, −2), artinya bayangan dari titik (x, y) adalah (x', y') = (x, −y). Dengan demikian, jika fungsi f(x) direfleksikan terhadap sumbu X, maka bayangannya adalah y = g(x) yang dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$g(x) = -f(x)$$

Titik (3, 2) dicerminkan terhadap sumbu Y, sehingga menghasilkan bayangan (−3, 2), artinya bayangan dari titik (x, y) adalah (x', y') = (−x, y). Dengan demikian, jika fungsi f(x) direfleksikan terhadap sumbu Y, maka bayangannya adalah y = g(x) yang dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$g(x) = f(-x)$$

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan bayangan dari fungsi linear f(x) = 2x − 6 jika direfleksikan terhadap:
   a. Sumbu X,
   b. Sumbu Y.

   Penyelesaian:

   a. Berdasarkan aturan refleksi terhadap Sumbu X, maka diperoleh g(x) = −f(x).

   g(x) = −f(x)
   = −(2x − 6)
   = −2x + 6

   Jadi, persamaan bayangannya adalah g(x) = −2x + 6.

   b. Berdasarkan aturan refleksi terhadap Sumbu Y, maka diperoleh g(x) = f (–x).

   g(x) = f (–x)
   = 2 (–x) − 6
   = −2x − 6

   Jadi, persamaan bayangannya adalah g(x) = −2x − 6.

2. Sebuah fungsi $f(x) = -x^2 + 4$ direfleksikan terhadap sumbu koordinat, sehingga bayangannya adalah $g(x) = x^2 - 4$. Tentukan sumbu koordinat tersebut.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = -x^2 + 4$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$g(x) = -x^2 + 4$

$= -(x^2 - 4x)$

$= -g(x)$

$g(x) = -f(x)$

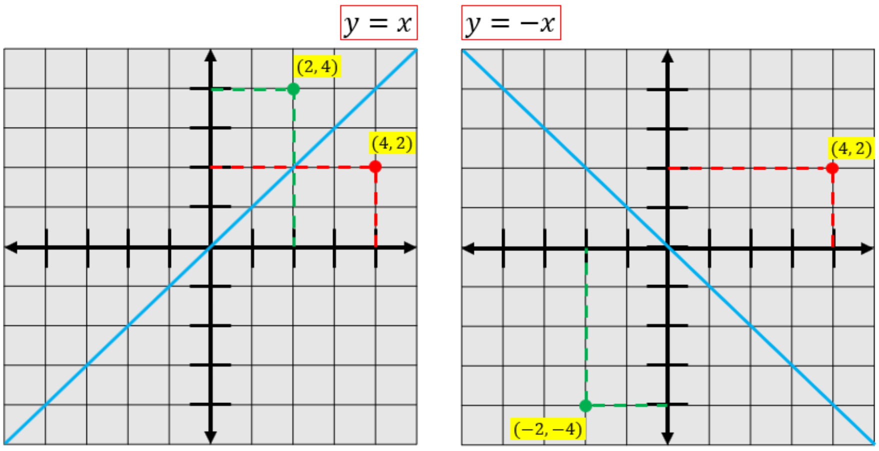
Oleh karena $g(x)$ merupakan bayangan dari $f(x)$, maka $g(x) = -f(x)$.

Berdasarkan aturan refleksi, $g(x) = -f(x)$ merupakan bayangan dari fungsi $f(x)$ yang direfleksikan terhadap sumbu X.

Jadi, sumbu koordinat tersebut adalah sumbu X.

Refleksi terhadap Garis y = x dan y = −x

Untuk menerapkan aturan refleksi fungsi terhadap garis $y = x$ dan $y = -x$, dapat dipilih sebuah titik (x, y) pada fungsi tersebut. Perhatikan gambar berikut.



Ilustrasi Refleksi terhadap Garis y = x dan y = −x – Zenius.net

Berdasarkan gambar di atas, apabila fungsi $y = f(x)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$, maka bayangannya dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$x = f(y)$$

Apabila fungsi $y = f(x)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$, maka bayangannya dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$x = -f(-y)$$

Contoh Soal

Tentukan persamaan bayangan dari fungsi linear f(x) = 2x + 6 jika direfleksikan terhadap:

a. garis y = x,

b. garis y = −x.

Penyelesaian:

a. Berdasarkan aturan refleksi terhadap garis y = x, maka diperoleh x = f(y).

$x = f(y)$

$\leftrightarrow x = 2y + 6$

$\leftrightarrow 2y = x - 6$

$\leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$

Jadi, persamaan bayangannya adalah $x = 2y + 6$ atau $y = \frac{1}{2}x - 3$.

b. Berdasarkan aturan refleksi terhadap Sumbu Y, maka diperoleh $x = -f(-y)$.

$x = -f(-y)$

$\leftrightarrow x = -(2(-y) + 6)$

$\leftrightarrow x = 2y - 6$

$\leftrightarrow 2y = x + 6$

$\leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$

Jadi, persamaan bayangannya adalah $x = 2y - 6$ atau $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Pojok Matematika

Bayangan di Permukaan Air

- Bayangan di permukaan air terjadi karena cahaya dipantulkan sesuai hukum refleksi, yaitu sudut datang cahaya sama dengan sudut pantulnya. Jika air tenang, refleksi akan terlihat jelas seperti cermin, tetapi jika air beriak, bayangan menjadi terdistorsi.
- Kejernihan bayangan dipengaruhi oleh ketenangan air, sudut cahaya, dan kejernihan air itu sendiri. Air yang tenang dan jernih memberikan refleksi yang lebih jelas, sedangkan air berombak atau keruh akan mengganggu tampilan bayangan.
- Fenomena ini sering terlihat pada danau, kolam, dan sungai yang tenang, di mana pepohonan, gunung, atau bahkan langit tampak "tercermin" di permukaannya. Bayangan ini menciptakan efek simetri alami yang sering dimanfaatkan dalam fotografi dan seni lanskap.

3. Rotasi (Perputaran)

Kipas Angin Berputar – Freepik.com

Rotasi adalah transformasi geometri yang memutar suatu objek atau titik mengelilingi titik pusat tertentu (biasanya titik asal: (0, 0)) sejauh sudut tertentu dan dengan arah tertentu (searah atau berlawanan arah jarum jam). Objek yang diputar dapat berupa fungsi atau kurva. Apabila grafik fungsi diputar, maka persamaan fungsi tersebut akan berubah. Untuk mendapat persamaan hasil rotasi, dapat dipilih sebuah titik pada grafik tersebut, dengan tujuan mendapatkan aturan umumnya.

Rotasi 90° atau −270° dengan Pusat (0, 0)

Rotasi 90° artinya diputar 90° berlawanan arah jarum jam. Rotasi 90° senilai dengan rotasi −270°, yang artinya diputar 270° searah jarum jam. Jika diketahui titik (x, −y) pada sebuah kurva f(x) dirotasi 90° atau 270° searah jarum jam dengan pusat (0, 0), maka menjadi titik (y, x) pada kurva g(x) dan dapat diformulasikan x' = −y atau y = −x' dan y' = x atau x = −y', sehingga:

$$y = f(x)$$

$$\leftrightarrow -x' = f(y')$$

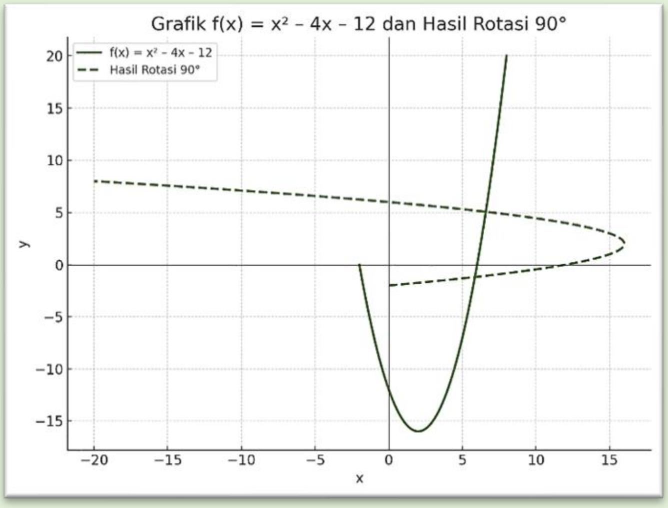
$$\leftrightarrow x' = -f(y)$$

Dengan demikian, apabila y = f(x) dirotasi 90° dengan pusat (0, 0), maka bayangannya dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\boxed{x = -f(y)}$$

Contoh Soal

Tentukan persamaan bayangan dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x - 12$ jika dirotasi 90° dengan pusat (0, 0) dan gambarkan grafiknya.



Penyelesaian:

Berdasarkan aturan rotasi 90° dengan pusat (0, 0) diperoleh $x = -f(y)$. Fungsi $f(x) = x^2 - 4x - 12$ dapat ditulis $y = x^2 - 4x - 12$, sehingga hasil rotasinya:

$x = -f(y)$

$x = -(y^2 - 4y - 12)$

$-x = y^2 - 4y - 12$

$-x = (y - 2)^2 - 4 - 12$

$-x = (y - 2)^2 - 16$

$-x + 16 = (y - 2)^2$

$y - 2 = \pm\sqrt{-x + 16}$

$y = 2 \pm \sqrt{-x + 16}$

Jadi, fungsi bayangannya yaitu gabungan fungsi $y = 2 + \sqrt{-x + 16}$ dan $y = 2 - \sqrt{-x + 16}$. Gambar grafik fungsi dan bayangannya dapat dilihat pada gambar di atas.

Rotasi −90° atau 270° dengan Pusat (0, 0)

Rotasi −90° artinya diputar 90° searah jarum jam. Rotasi −90° senilai dengan rotasi 270°, yang artinya diputar 270° berlawanan arah jarum jam. Jika diketahui titik (x, y) pada sebuah kurva f(x) dirotasi 90° searah jarum jam atau 270° berlawanan arah jarum jam dengan pusat (0, 0), maka menjadi titik (y, −x) pada kurva g(x) dan dapat diformulasikan $x' = y$ dan $y' = -x$ atau $x = -y'$, sehingga:

$$y = f(x)$$

$$\leftrightarrow x' = f(-y)$$

Dengan demikian, apabila $y = f(x)$ dirotasi −90° dengan pusat (0, 0), maka bayangannya dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\boxed{x = f(-y)}$$

Contoh Soal

Tentukan persamaan bayangan dari fungsi linear f(x) = 2x + 6 jika dirotasi −90° dengan pusat (0, 0) dan gambarkan grafiknya.

Penyelesaian:

Berdasarkan aturan rotasi −90° dengan pusat (0, 0) maka diperoleh x = f(−y).

$x = f(-y)$

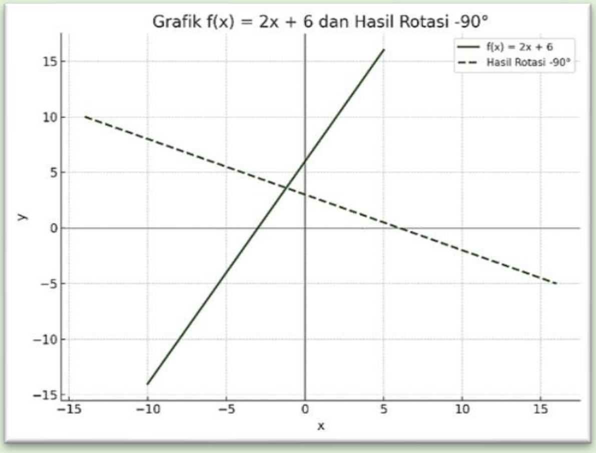
$x = 2(-y) + 6$

$x = -2y + 6$

$2y = -x + 6$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$

Jadi, persamaan bayangannya adalah $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ atau $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Gambar grafik fungsi dan bayangannya adalah sebagai berikut.



Rotasi 180° atau −180° dengan Pusat (0, 0)

Rotasi 180° artinya diputar 180° berlawanan arah jarum jam. Rotasi 180° senilai dengan rotasi −180°, yang artinya diputar 1800° searah jarum jam. Jika diketahui titik (x, y) pada sebuah kurva f(x) dirotasi 180° atau −180° dengan pusat (0, 0), maka menjadi titik (−x, −y) pada kurva g(x) dan dapat diformulasikan x' = −x atau x = −x' dan y' = −y atau y = −y', sehingga:

$$y = f(x)$$

$$\leftrightarrow -y' = f(-x')$$

$$\leftrightarrow y' = -f(-x)$$

Dengan demikian, apabila y = f(x) dirotasi 180° dengan pusat (0, 0), maka bayangannya adalah y = g(x) yang didefinisikan dengan persamaan:

$$\boxed{g(x) = -f(-x)}$$

Contoh Soal

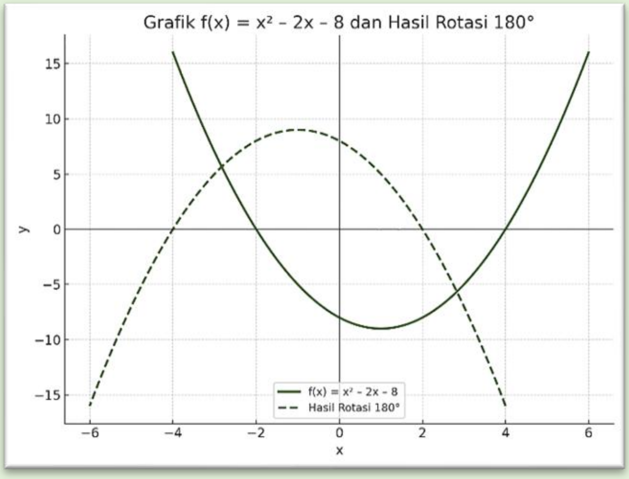
Sebuah fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ dirotasi sejauh 180° dengan pusat (0, 0). Tentukan fungsi bayangan dan gambarkan grafiknya.

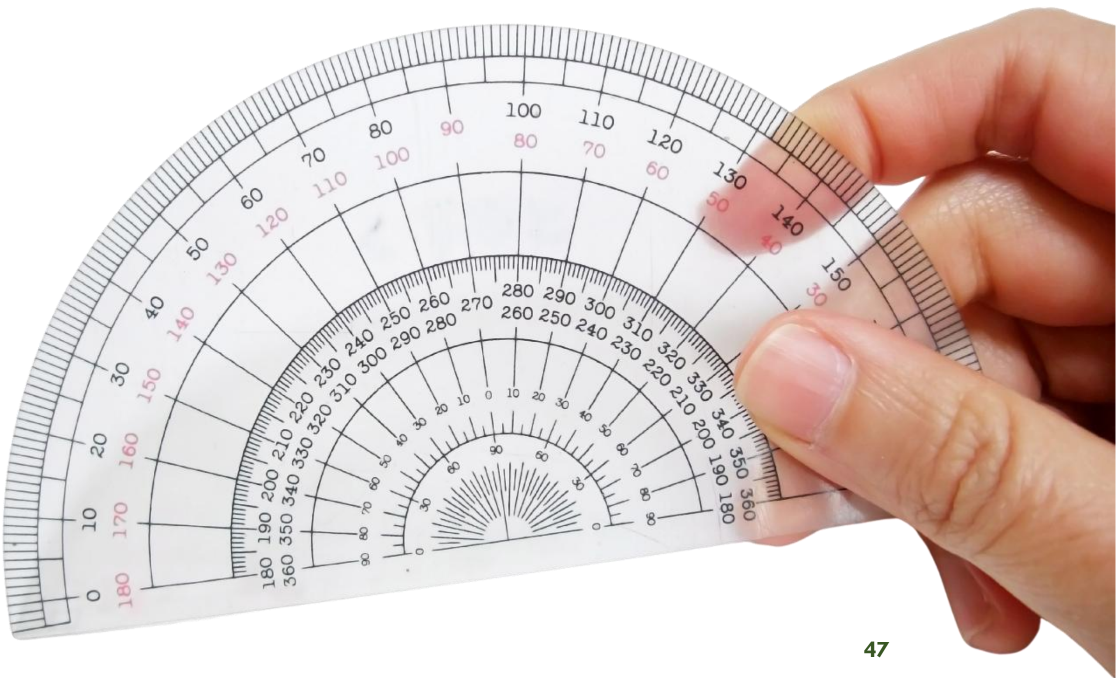
Penyelesaian:

Berdasarkan aturan rotasi 180° dengan pusat (0, 0) maka diperoleh $g(x) = -f(-x)$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -f(-x) \\
&= -f(-x) \\
&= -((-x)^2 - 2(-x) - 8 \\
&= -(x^2 + 2x - 8) \\
&= -x^2 - 2x + 8
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi bayangannya adalah $g(x) = -x^2 - 2x + 8$. Berikut gambar grafik fungsi dan bayangannya.





4. Dilatasi

Zoom Kamera Menggunakan Konsep Dilatasi – Freepik.com

Dilatasi adalah transformasi geometri yang mengubah ukuran suatu objek dengan cara memperbesar atau memperkecil berdasarkan suatu titik pusat dan faktor skala (k). Apabila sebuah grafik fungsi dilatasikan, persamaan fungsi tesebut akan berubah. Untuk mendapat persamaan hasil dilatasi, dapat dipilih sebuah titik pada grafik tersebut untuk mendapatkan aturan umumnya. Jika sebuah titik (x, y) dilatasikan dengan pusat (0, 0) dan faktor skala k, maka bayangannya adalah (kx, ky), artinya x' = kx atau x = $\frac{x'}{k}$ dan y' = ky atau y = $\frac{y'}{k}$, sehingga jika fungsi dari kurva awal adalah f(x), maka hasil petanya adalah sebagai berikut.

$$y = f(x)$$

$$\frac{y'}{k} = f\left(\frac{x'}{k}\right)$$

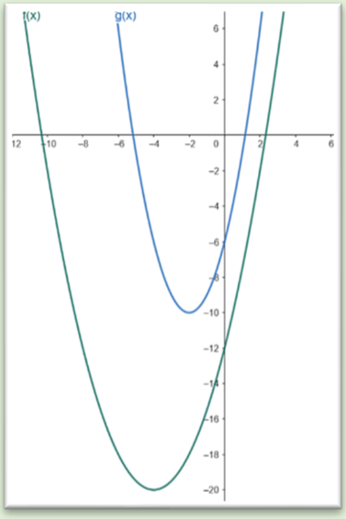
$$y' = k \cdot f\left(\frac{x'}{k}\right)$$

Dengan demikian, jika fungsi y = f(x) dilatasikan dengan pusat (0, 0) dan faktor skala k, maka bayangannya adalah y = g(x) dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\boxed{g(x) = k \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)}$$

Contoh Soal

Tentukan persamaan bayangan dari fungsi f(x) = $x^2 + 4x - 6$ jika ditranslasikan dengan pusat (0, 0) dan faktor skala 2. Kemudian gambarkan grafiknya.



Penyelesaian:

Berdasarkan aturan dilatasi dengan pusat (0, 0) dan faktor skala 2, maka diperoleh $g(x) = 2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Untuk fungsi f(x) = $x^2 + 4x - 6$, hasil dilatasinya adalah

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) - 6\right) \\
&= 2\left(\frac{x^2}{4} + 2x - 6\right) \\
&= \frac{x^2}{2} + 4x - 12
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi persamaannya adalah $\frac{x^2}{2} + 4x - 12$.

Gambar grafik fungsi dan bayangannya seperti terlihat pada gambar di samping.

Pojok Matematika

Dilatasi dalam Dunia Fotografi

- ▷ Ketika kita melakukan *zoom in* atau *zoom out* pada kamera digital, sistem kamera menerapkan konsep dilatasi (penskalaan) pada gambar. *Zoom* optik memperbesar gambar dengan mengubah posisi lensa tanpa kehilangan kualitas, sedangkan *zoom* digital memperbesar gambar dengan menambah piksel, sering kali mengurangi ketajaman.
- ▷ Dalam pengolahan gambar digital, fitur seperti resize menggunakan dilatasi untuk memperbesar atau memperkecil gambar. Algoritma interpolasi, seperti *nearest-neighbor* atau *bicubic interpolation*, membantu mempertahankan kualitas gambar saat ukurannya diubah. Teknologi ini digunakan dalam berbagai aplikasi pengeditan foto dan desain grafis.
- ▷ Dalam fotografi modern, konsep dilatasi juga digunakan dalam efek perspektif dan koreksi distorsi lensa. Misalnya, pada fotografi arsitektur, fitur *lens correction* dapat menyesuaikan ukuran dan bentuk objek agar terlihat lebih proporsional. Selain itu, dalam panorama atau gambar 360 derajat, dilatasi membantu menyusun dan menyesuaikan skala gambar agar terlihat natural tanpa distorsi berlebihan.

5. Komposisi Transformasi Fungsi

Transformasi fungsi yang telah dipelajari dapat dikelompokkan ke dalam empat jenis, yaitu translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi. Meskipun demikian, dalam transformasi fungsi juga dimungkinkan untuk menggunakan kombinasi dari keempat jenis transformasi tersebut. Kombinasi ini disebut sebagai komposisi transformasi, yaitu penggabungan dua atau lebih bentuk transformasi, seperti translasi dengan refleksi, atau translasi dengan translasi, dan sebagainya.

Pola Geometri dalam Kain Tradisional – Pikiran-rakyat.com

Contoh Soal

Diketahui fungsi kuadrat $2x^2 - 4x - 16$. Jika hasil petanya adalah g(x), tentukan hasil peta karena penggeseran 3 satuan ke kiri sejajar sumbu X dilanjutkan penggeseran 2 satuan ke atas sejajar sumbu Y, kemudian dilatasi dengan faktor skala $\frac{1}{4}$ dengan pusat (0, 0).

Penyelesaian:

Berdasarkan aturan translasi penggeseran 3 satuan ke kiri sejajar sumbu X dilanjutkan penggeseran 2 satuan ke atas sejajar sumbu Y diperoleh:

$y = f(x + 3) + 2$

$y = 2(x + 3)^2 - 4(x + 3) - 16 + 2$

$y = 2(x^2 + 6x + 9) - 4x - 12 - 16 + 2$

$y = 2x^2 + 12x + 18 - 4x - 12 - 16 + 2$

$y = 2x^2 + 8x - 8$

kemudian dilanjutkan translasi faktor skala $\frac{1}{4}$ dengan pusat (0, 0). Berdasarkan aturan translasi dengan pusat (0, 0) faktor skala $\frac{1}{4}$ diperoleh

$y = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{x}{\frac{1}{4}}\right) \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot f(4x)$

maka bayangannya adalah

$$y = \frac{1}{4}(2(4x)^2 + 8(4x) - 8)$$

$$y = \frac{1}{4}(2 \times 16x^2 + 32x - 8)$$

$$y = \frac{1}{4}(32x^2 + 32x - 8)$$

$$y = 8x^2 + 8x - 2$$

Jadi, bayangan dari $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 16$ karena penggeseran 3 satuan ke kiri sejajar sumbu X dilanjutkan penggeseran 2 satuan ke atas sejajar sumbu Y, kemudian dilatasi faktor skala $\frac{1}{4}$ dengan pusat (0, 0) adalah $y = 8x^2 + 8x - 2$.

Pojok Matematika

Teknik Transformasi Fungsi untuk Visual Film

- Transformasi fungsi digunakan untuk menerapkan tekstur pada model 3D agar terlihat realistis. Dengan transformasi seperti translasi, rotasi, dan skala, gambar 2D dapat menyesuaikan bentuk objek, menciptakan permukaan yang tampak alami dalam animasi dan efek khusus.
- Transformasi juga berperan dalam perspektif kamera, terutama dalam efek green screen dan CGI. Dengan menyesuaikan tampilan objek berdasarkan sudut pandang kamera, film dapat menciptakan ilusi ruang yang lebih mendalam dan menyatu dengan adegan nyata.
- Selain itu, animasi dan efek distorsi dalam film menggunakan transformasi untuk mengubah bentuk karakter atau objek. Teknik ini memungkinkan efek seperti peregangan, kompresi, atau perubahan perspektif yang dinamis, menjadikan adegan aksi atau fantasi lebih menarik dan imersif.

Rangkuman

▷ Transformasi fungsi merupakan proses mengubah rumus, posisi, atau bahkan bentuk grafik suatu fungsi menjadi posisi baru, setiap perubahan suatu fungsi merupakan akibat transformasi.

▷ Jenis transformasi adalah translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (pencerminan), dan dilatasi.

▷ Translasi fungsi f(x) menjadi:

- $f(x - a)$ akibat pergeseran ke kanan sejauh a untuk $a > 0$,
- $f(x + a)$ akibat pergeseran ke kiri sejauh a untuk $a > 0$,
- $f(x) + b$ akibat pergeseran ke kanan sejauh b untuk $b > 0$,
- $f(x) - b$ akibat pergeseran ke bawah sejauh b untuk $b > 0$.

▷ Refleksi persamaan $y = f(x)$ menjadi:

- $y = f(2h - x)$ akibat refleksi terhadap garis $x = h$,
- $y = 2k - f(x)$ akibat refleksi terhadap garis $y = k$,
- $y = -f(x)$ akibat refleksi terhadap sumbu X,
- $y = f(-x)$ akibat refleksi terhadap sumbu Y,
- $x = f(y)$ akibat refleksi terhadap garis $y = x$,
- $x = -f(-y)$ akibat refleksi terhadap garis $y = -x$.

▷ Rotasi persamaan $y = f(x)$ menjadi:

- $x = -f(y)$ akibat rotasi 90 dengan pusat (0, 0),
- $x = f(-y)$ akibat rotasi −90 dengan pusat (0, 0),
- $y = -f(-x)$ akibat rotasi 180 dengan pusat (0, 0).

▷ Dilatasi fungsi f(x) menjadi:

- $k \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ akibat dilatasi dengan pusat (0, 0) dan faktor skala k,
- $\frac{1}{k} \cdot f(kx)$ akibat dilasi dengan pusat (0, 0) dan faktor skala $\frac{1}{k}$.

Latihan Soal

1. Persamaan bayangan dari fungsi $f(x) = 3x - 5$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah…

   a. $g(x) = 3x + 2$
   b. $g(x) = 3x - 3$
   c. $g(x) = 3x - 2$
   d. $g(x) = 2x + 2$
   e. $g(x) = 2x - 2$

2. Sebuah fungsi $f(x) = x^2 - 12x + 32$ ditranslasi sehingga bayangannya adalah $g(x) = x^2 - 6x + 8$. Matriks translasi fungsi tersebut adalah …

   a. $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Bayangan dari fungsi $f(x) = x^2 + x - 6$ jika dicerminkan terhadap garis $y = 2$ adalah….

   a. $g(x) = -x^2 - x - 10$
   b. $g(x) = -x^2 - x + 10$
   c. $g(x) = -x^2 - x + 10$
   d. $g(x) = -x^2 + x + 10$
   e. $g(x) = -x^2 + x - 10$

4. Bayangan dari fungsi $f(x) = x^2 - 5$ jika dicerminkan terhadap Sumbu X adalah …

   a. $g(x) = 5 + x^2$
   b. $g(x) = 5 - x^2$
   c. $g(x) = 5x^2 - 5$
   d. $g(x) = -5 - x^2$
   e. $g(x) = -5 + x^2$

5. Jika fungsi $f(x) = -x^2 + 4$ diputar 90° terhadap titik pusat (0, 0). Bentuk persamaan bayangannya adalah …

   a. $g(x) = x + 4$
   b. $g(x) = -4 + x^2$
   c. $g(x) = -x + 4$
   d. $g(x) = 4 + x^2$
   e. $g(x) = 4 - x^2$

6. Fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 5$ untuk $x > 1$ dirotasi 270° dengan pusat (0, 0). Jika hasil peta dari fungsi tersebut adalah $g(x)$, maka nilai $g(7) = …$

   a. 5
   b. −5
   c. 3
   d. −3
   e. 6

7. Persamaan bayangan dari fungsi linear $f(x) = -2x + 6$ jika ditranslasikan dengan pusat $(0, 0)$ dan faktor skala -2 adalah …

   a. $g(x) = 6x + 6$
   b. $g(x) = -6x + 12$
   c. $g(x) = -2x + 12$
   d. $g(x) = -2x - 12$
   e. $g(x) = -2x - 6$

8. Grafik fungsi $f(x) = 2x^2 + 1$ dicerminkan terhadap sumbu X kemudian digeser ke kanan sejauh 2 satuan. Jika hasil transformasi terakhir adalah $g(x) = ax^2 + bx + c$, maka nilai $a + b + c = …$

   a. 5
   b. -1
   c. -3
   d. 1
   e. 3

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 12 BAB 2

Referensi

Bartlett, R. (2007). *Introduction to Sports Biomechanics: Analysing Human Movement Patterns*. Routledge.

Bissonette, J. A., & Storch, I. (2007). *Temporal and Spatial Dynamics of Landscape Reflectance*. Springer.

Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing* (4th ed.). Pearson.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). *Fundamentals of Physics* (10th ed.). Wiley.

Knudson, D. (2007). *Fundamentals of Biomechanics* (2nd ed.). Springer.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Precalculus: Real Mathematics, Real People* (6th ed.). Brooks Cole.

McGinnis, P. M. (2013). *Biomechanics of Sport and Exercise* (3rd ed.). Human Kinetics.

Smith, R. T., & Minton, R. B. (2012). *Calculus: Early Transcendental Functions*. McGraw-Hill Education.

Watt, A., & Watt, M. (1992). *Advanced Animation and Rendering Techniques*. Addison-Wesley.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2014). *Advanced Engineering Mathematics* (5th ed.). Jones & Bartlett.

Zulkardi. (2002). *Transformasi Geometri dan Pembelajarannya*. Universitas Sriwijaya.

BAB 3

PERMUTASI KOMBINASI

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Mandiri**

Mampu menyelesaikan masalah permutasi dan kombinasi secara independen, serta menerapkan konsep-konsep matematika dalam permasalahan sehari-hari dengan berpikir kritis dan terencana.

▷ **Peduli Terhadap Sesama**

Mengaplikasikan pengetahuan tentang permutasi dan kombinasi untuk memecahkan masalah yang berdampak positif pada kehidupan masyarakat.

Kata Kunci: Permutasi, Kombinasi, Aturan Pencacahan, Ekspansi Binomial, Penyelesaian Masalah, Masalah Kontekstual.

Tujuan Pembelajaran: Berpikir Kritis dengan Permutasi dan Kombinasi

1. **Menganalisis dan menyelesaikan masalah terkait aturan pencacahan dengan permutasi dan kombinasi**
   - ▷ Mengidentifikasi dan memahami prinsip dasar permutasi dan kombinasi dalam menyelesaikan masalah nyata.
   - ▷ Menentukan jenis aturan pencacahan yang tepat berdasarkan konteks permasalahan yang diberikan.

2. **Memecahkan masalah kontekstual yang berkaitan dengan permutasi dan kombinasi**
   - ▷ Menerapkan konsep permutasi dan kombinasi untuk mencari solusi dari permasalahan sehari-hari.
   - ▷ Memilih metode penyelesaian yang sesuai dengan karakteristik masalah kontekstual yang dihadapi.

3. **Memahami penyelesaian masalah yang berkaitan dengan permutasi dan kombinasi**
   - ▷ Menuliskan langkah-langkah penyelesaian secara sistematis dan logis dalam bentuk yang mudah dipahami.
   - ▷ Menyertakan penjelasan dan alasan matematis dalam setiap tahap penyelesaian.

4. **Mendeskripsikan proses dari hasil pemecahan masalah dengan aturan permutasi dan kombinasi**
   - ▷ Menjelaskan proses berpikir dan strategi penyelesaian masalah secara lisan atau tulisan kepada orang lain.
   - ▷ Menyampaikan hasil akhir beserta cara memperolehnya secara jelas dan terstruktur sesuai kaidah matematika.

1. Permutasi

Faktorial

Faktorial adalah suatu operasi matematika yang melibatkan perkalian bilangan bulat positif berturut-turut mulai dari angka tersebut hingga angka 1. Notasi faktorial ditulis dengan tanda seru (!), di mana n! (dibaca "n faktorial") adalah hasil perkalian semua angka dari n sampai 1. Faktorial dapat didefinisikan sebagai berikut.

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$, dan seterusnya

secara umum

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

perhatikan juga bahwa

$n! = n \cdot (n-1)!$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$, dan seterusnya

Contoh Soal

1. Hitunglah,

   a. $5! \cdot 3!$

   b. $\frac{7!}{5!}$

   Penyelesaian:

   a. $5! \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

   b. $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$

2. Nyatakan bentuk $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ dalam notasi faktorial.

   Penyelesaian:

   $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{8!}{4!}$

Permutasi Semua Unsur Berbeda

Permutasi merupakan cara untuk menyusun objek-objek yang dibentuk dari n unsur, yang diperoleh dari n unsur atau sebagian unsur.

Apabila terdapat n unsur yang berbeda diambil n unsur, maka banyak susunan (permutasi) yang berbeda dari n unsur tersebut adalah $P(n, n) = n!$. Dalam permutasi ini, setiap susunan atau urutan objek dihitung sebagai hasil yang unik.

1) $P(n, n) = {}_nP_n$ dibaca permutasi tingkat n dari n unsur.

2) $P(n, n) = n!$

Ilustrasi Penyusunan Sepatu dengan Konsep Permutasi – Freepik.com

Contoh Soal

1. Tentukan banyak permutasi jika tiga buah unsur {A, B, C} dipermutasikan tiga-tiga tiap kelompok.

   Penyelesaian:

   $n = 3 \rightarrow$ banyak permutasi adalah $P(3, 3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, yaitu:

   1) ABC
   2) ACB
   3) BAC
   4) BCA
   5) CAB
   6) CBA

2. Terdapat 5 siswa yang ingin duduk di sebuah bangku yang hanya memiliki 5 tempat duduk. Tentukan banyak cara siswa-siswa tersebut duduk secara acak.

   Penyelesaian:

   Diketahui 5 siswa dan 5 tempat duduk, maka $n = 5$.

   $P(5, 5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

   Jadi, banyak kemungkinan siswa duduk pada kursi yang tesedia adalah 120.

3. Harry memiliki 5 pasang sepatu dan 3 pasang sandal yang akan disusun pada sebuah rak. Rak tersebut memiliki 8 tempat kosong yang dapat digunakan. Tentukan banyak cara menyusun sepatu dan sandal pada tempat yang tersedia.

   Penyelesaian:

   Diketahui 8 tempat kosong dan 8 pasang alas kaki (5 pasang sepatu dan 3 pasang sandal), maka $n = 8$.

   $P(8, 8) = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$

   Jadi, banyak kemungkinan cara menyusun alas kaki pada rak adalah 40.320.

Permutasi Sebagian Unsur Berbeda

Permutasi P(n, n) menjelaskan bahwa dari n unsur yang tersedia diambil seluruhnya untuk disusun. Dari n unsur dapat pula dibuat susunan yang hanya berunsur r, untuk r < n dengan memperhatikan urutannya.

Jumlah permutasi r unsur yang diambil dari n buah unsur yang berbeda adalah P(n, r) = $\frac{n!}{(n-r)!}$ untuk r < n. P(n, r) dibaca permutasi tingkat r dari n. Dengan n adalah jumlah total objek yang tersedia dan r adalah jumlah objek yang dipilih atau disusun.

Contoh Soal

1. Hitunglah P(11, 4).

   Penyelesaian:

   $$P(11, 4) = \frac{11!}{(11-4)!}$$

   $$= \frac{11!}{7!}$$

   $$= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7.920$$

2. Terdapat delapan orang yang mengikuti perlombaan pidato Bahasa Inggris. Dari perlombaan tersebut akan diambil 3 orang sebagai juara yaitu juara I, juara II, dan juara III. Tentukan banyak kemungkinan susunan juara yang terjadi.

   Penyelesaian:

   Banyak peserta lomba adalah 8 dan hanya ada 3 juara, maka n = 8 dan r = 3.

   $$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!}$$

   $$= \frac{8!}{5!}$$

   $$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$$

   $$= 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

   Jadi, terdapat 336 cara dalam penentuan juara tersebut.

3. Tentukan banyak bilangan ribuan kurang dari 5.000 yang dapat dibentuk dari angka-angka {2, 3, 4, 5, 6} tanpa ada angka yang berulang.

   Penyelesaian:

   - Tempat ribuan hanya dapat diisi dengan 3 cara, yaitu dari angka-angka 2, 3, dan 4.
   - Tiga tempat lainnya dapat diisi oleh 4 angka yang sisa, dalam permutasi

   $$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!}$$

   $$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

   Jadi, banyaknya bilangan kurang dari 5.000 adalah 3 × P(4, 3) = 3 × 24 = 72.

Permutasi Beberapa Unsur Sama

Permutasi beberapa unsur sama adalah cara untuk menyusun objek-objek yang tidak semuanya berbeda. Dalam hal ini, terdapat beberapa objek yang identik atau memiliki nilai yang sama. Secara umum, permutasi dengan unsur-unsur yang sama dapat dijelaskan sebagai berikut.

Jumlah cara membagi n buah unsur ke dalam k sel yang masing-masing terdiri dari n_1 unsur pada sel pertama, n_2 unsur pada unsur kedua, dan seterusnya sampai nk unsur pada sel ke-k adalah

$$(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots n_k!}$$

Contoh Soal

1. Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata MATEMATIKA?

   Penyelesaian:

   Unsur-unsur yang sama meliputi M, T, dan A masing-masing 2 buah dan banyak huruf ada 10 buah maka:

   $$\binom{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{10!}{2! \times 2! \times 2!}$$

   $$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 453.600$$

2. Tentukan banyak cara untuk menyusun bola dalam sebuah barisan apabila terdapat 5 bola merah, 2 bola biru, dan 1 bola hijau. Bola-bola yang berwarna sama tidak dapat dibedakan satu sama lain.

   Penyelesaian:

   Terdapat 8 bola yang terdiri dari 5 bola merah, 2 bola merah, dan 1 bola hijau.

   Banyak cara berbeda adalah

   $$\binom{8}{5 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{5! \times 2! \times 1!} = 168$$

   Jadi, terdapat 168 cara berbeda untuk menyusun bola-bola tersebut dalam sebuah barisan.

3. Tentukan banyak cara berbeda 7 orang siswa dapat dibagi atas 2 kelompok yang masing-masing anggotanya 3 dan 4 orang.

   Penyelesaian:

   Banyak cara berbeda adalah

   $$P = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35.$$

Permutasi Siklis (Permutasi Melingkar)

Ilustasi Penerapan Permutasi Siklis – Freepik.com

Permutasi siklis (melingkar) adalah cara untuk menyusun objek-objek dalam bentuk lingkaran. Dalam permutasi ini, posisi objek yang sama akan terhitung sama meskipun objek tersebut diputar (rotasi). Artinya, hanya susunan yang berbeda dalam posisi relatif antar objek yang dihitung sebagai permutasi yang unik.

Secara umum, banyaknya permutasi siklis dari n objek adalah $(n - 1)!$

Contoh Soal

1. Tentukan banyak cara 6 bunga yang berbeda dapat disusun dalam sebuah vas bunga berbentuk lingkaran.

   Penyelesaian:

   $P = (6 - 1)!$

   $= 5!$

   $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

   $= 120$

2. Sebuah rapat dalam posisi melingkar akan dihadiri oleh 5 kelompok masing-masing terdiri dari 3 anggota. Jika setiap anggota harus berada dalam kelompoknya saat rapat, tentukan banyak kemungkinan posisi pada rapat tersebut.

   Penyelesaian:

   - Setiap anggota kelompok dapat disusun

     $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ kemungkinan.

   - Terdapat 5 kelompok disusun melingkar maka terdapat

     $(5 - 1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ kemungkinan.

   Jadi, banyak kemungkinan posisi pada rapat tersebut adalah $6 \times 24 = 144$.

3. Sebuah gelang dibuat dengan merangkai 7 manik-manik kecil dengan warna berbeda dan 3 manik-manik besar dengan warna berbeda. Tentukan banyak kemungkinan rangkaian gelang apabila manik-manik besar harus mengapit manik-manik kecil, artinya manik besar tidak boleh berdekatan.

Penyelesaian:

- Tujuh manik-manik kecil dapat disusun

  $$\frac{(7-1)!}{7!}$$

- Tiga manik-manik besar di antara manik-manik kecil, sehingga dapat disusun

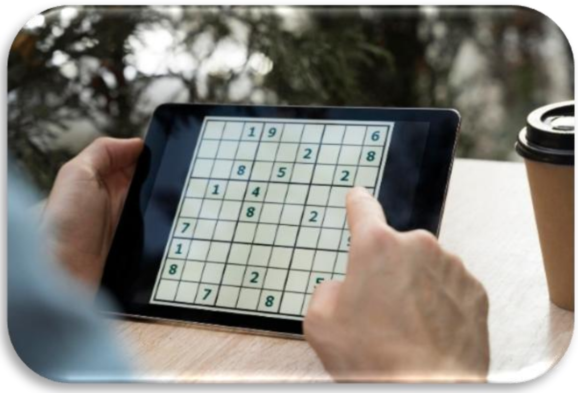
  $$_7C_3 = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!}$$

  Jadi, banyak kemungkinan rangkaian gelang yang terjadi adalah

  $$\frac{(7-1)!}{7!} \times \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{6!}{4! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

Pojok Matematika

Permutasi dalam Permainan Sudoku



- ▷ Sudoku terdiri dari sebuah grid 9×9 yang dibagi menjadi 9 kotak 3×3. Tujuannya adalah mengisi seluruh kotak dengan angka 1 sampai 9, sedemikian rupa sehingga setiap angka muncul tepat satu kali di setiap baris, kolom, dan blok 3×3. Ini adalah contoh nyata dari penerapan permutasi, karena dalam satu baris atau kolom, harus menyusun sembilan angka berbeda tanpa pengulangan.
- ▷ Secara teoritis, jika hanya melihat satu baris dan ingin menyusun angka 1 sampai 9 secara unik, maka ada 9! (9 faktorial) atau 362.880 kemungkinan susunan. Namun, ketika mempertimbangkan aturan Sudoku secara keseluruhan — yaitu, tidak boleh ada pengulangan angka dalam baris, kolom, dan kotak kecil 3×3 — maka jumlah total susunan yang valid menjadi jauh lebih kompleks. Setelah dihitung secara komputasional, jumlah total grid Sudoku yang valid adalah sekitar 6.670.903.752.021.072.936.960, atau lebih dari 6,67 sekstiliun kemungkinan.
- ▷ Angka tersebut menunjukkan betapa luasnya ruang solusi dalam Sudoku, dan betapa pentingnya konsep permutasi dalam memahami dan bahkan merancang teka-teki ini. Para pembuat Sudoku menggunakan prinsip-prinsip kombinatorika untuk memastikan teka-teki mereka memiliki solusi unik. Jadi, setiap kali menyelesaikan sebuah Sudoku, sebenarnya sedang bermain-main dengan konsep permutasi tingkat tinggi tanpa perlu sadar bahwa sedang menggunakan matematika.

2. Kombinasi

Menyusun Barang Dapat Menggunakan Kombinasi – Freepik.com

Suatu permutasi "tanpa memperhatikan urutan unsur yang terpilih" dinamakan kombinasi. Dalam kombinasi, susunan objek tidak diperhitungkan. Dalam hal ini, urutan objek yang dipilih tidak mempengaruhi hasilnya.

Secara umum, kombinasi r unsur dari n unsur yang diketahui di mana $r \leq n$ dinyatakan sebagai berikut.

$$C(n, r) = \frac{P(n,\ r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ atau } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

dengan n adalah jumlah objek yang tersedia dan r adalah jumlah objek yang dipilih.

Contoh Soal

1. Sebuah komite melakukan rekrutmen terbuka yang diikuti oleh 8 orang dan hanya dua orang yang terpilih menjadi anggota. Berapa banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih anggota tersebut?

   Penyelesaian:

   Banyak anggota = banyak kombinasi 2 dari 8 = C(8, 2)

   $$C(8, 2) = \frac{8!}{2! \times (8-2)!}$$

   $$= \frac{8!}{2! \times 6!}$$

   $$= \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 \text{ cara}$$

2. Dari 8 guru sejarah dan 6 guru sosiologi akan dipilih 7 sebagai juri lomba menulis esai sosial. Tentukan banyak cara pemilihan juri apabila 4 di antaranya guru sejarah.

   Penyelesaian:

   Memilih 4 dari 8 guru sejarah dan 3 dari 6 guru sosiologi.

   Banyak cara = C(8, 4) × C(6, 3)

   $$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$$

$= 70 \times 20 = 1.400$ cara

3. Seorang siswa harus menjawab 8 soal dari 10 soal yang tersedia.

   a. Berapa banyak cara pilihan untuk menjawab soal tersebut?

   Penyelesaian:

   Dalam kasus ini, nomor soal diabaikan. Banyak cara memilih 8 soal dari 10 soal yang tersedia menggunakan C(10, 8) maka

   $$C(10, 8) = \frac{10!}{8! \times (10-8)!}$$

   $$= \frac{10!}{8! \times 2!}$$

   $$= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ cara}$$

   b. Apabila 2 soal pertama harus dijawab, tentukan banyak pilihan untuk menjawab soal tersebut.

   Penyelesaian:

   Apabila dua soal pertama harus dijawab, maka dipastikan sudah memilih dua soal secara otomatis, dan hanya perlu memilih 6 soal lagi dari 8 soal yang tersisa, artinya dapat dihitung dengan rumus C(8, 6).

   $$C(8, 6) = \frac{8!}{6! \times (8-6)!}$$

   $$= \frac{8!}{6! \times 2!}$$

   $$= \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 \text{ cara}$$

   c. Apabila dia harus mejawab paling sedikit 3 dari 5 soal pertama, tentukan banyak cara pilihan untuk menjawab soal tersebut.

   Penyelesaian:

   Siswa tersebut harus paling sedikit menjawab 3 dari 5 soal pertama. Dalam hal ini terdapat beberapa kemungkinan:

   - Jika menjawab 3 soal dari 5 soal pertama, dan 5 soal dari 5 soal yang tersisa, maka:

     $$C(5, 3) \times C(5, 5) = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{5!\,0!}$$

     $$= 10 \times 1 = 10 \text{ cara}$$

   - Jika menjawab 4 soal dari 5 soal pertama, dan 4 soal dari 5 soal yang tersisa, maka:

     $$C(5, 4) \times C(5, 4) = \frac{5!}{4!\,1!} \times \frac{5!}{4!\,1!}$$

     $$= 5 \times 5 = 25 \text{ cara}$$

   - Jika menjawab 5 soal dari 5 soal pertama, dan 3 soal dari 5 soal yang tersisa, maka:

     $$C(5, 5) \times C(5, 3) = \frac{5!}{5!\,0!} \times \frac{5!}{3!\,2!}$$

     $$= 1 \times 10 = 10 \text{ cara}$$

   Jadi, terdapat 10 + 25 + 10 = 45 cara untuk memilih soal dengan syarat bahwa siswa harus menjawab paling sedikit 3 dari 5 soal pertama.

4. Terdapat 6 siswa laki-laki dan 4 siswa perempuan, akan dibentuk tim yang terdiri dari 4 orang. Tentukan banyak cara membentuk jika jumlah siswa perempuan dan laki-laki dalam tim tersebut sama banyak.

   Penyelesaian:

   Memilih 2 dari 6 siswa laki-laki dan 2 dari 4 siswa perempuan.

   Banyak cara = C(6, 2) × C(4, 2)

   $$= \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \times \frac{4!}{2!\,(4-2)!}$$

   $$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1}$$

   = 15 × 6 = 90 cara

5. Tentukan banyak cara 8 peserta diskusi dibagi dalam dua kelompok yang terdiri dari 5 anggota dan 3 anggota.

   Penyelesaian:

   Alternatif 1:

   $n = 8$, $n_1 = 5$, dan $n_2 = 3$.

   Ada $\binom{8}{5\ 3} = \frac{8!}{5!\,3!}$

   $$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

   = 56 cara

   Alternatif 2:

   Pertama, pilih 5 dari 8, maka ada

   $$C(8, 5) = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ cara}$$

   Pilih 3 dari 3, maka ada

   C(3, 3) = 1

   Jadi, banyaknya cara = C(8, 5) × C(3, 3)

   = 56 × 1

   = 56 cara

Pojok Matematika

Kombinasi Pewarisan Sifat Genetik

- Dalam genetika, sifat diturunkan dari orang tua ke anak melalui pasangan gen atau alel. Setiap individu memiliki dua alel untuk setiap sifat — satu dari ayah dan satu dari ibu. Saat menghitung kemungkinan kombinasi alel yang diwariskan kepada keturunan, menggunakan prinsip kombinasi, karena urutan alel tidak penting, hanya isinya.
- Misalnya, jika ayah memiliki alel A dan a, dan ibu juga memiliki A dan a, maka kombinasi alel untuk anak bisa berupa: AA, Aa, atau aa. Kombinasi Aa dan aA dianggap sama, karena urutan tidak mengubah sifat yang muncul — maka kita hitung hanya satu kombinasi Aa. Di sinilah kombinasi berperan penting, karena menghitung berapa banyak kemungkinan pasangan genetik yang berbeda.
- Prinsip kombinasi ini digunakan dalam peta pewarisan sifat, seperti diagram Punnett, untuk memprediksi peluang seorang anak mewarisi sifat tertentu (misalnya mata cokelat atau biru, golongan darah, atau penyakit genetik). Kombinasi membantu ilmuwan, dokter, dan guru biologi menjelaskan cara sifat diturunkan dalam keluarga.

3. Ekspansi Binomial

Seseorang sedang Belajar – Freepik.com

Ekspansi binomial merujuk pada cara untuk mengembangkan pangkat dari suatu binomial, yaitu ekspresi yang terdiri dari dua suku yang dipangkatkan. umus yang digunakan untuk mengembangkan ekspresi binomial adalah Teorema Binomial. Teorema ini memberikan cara untuk mengekspansi bentuk binomial seperti:

$$(a + b)^n$$

dengan a dan b adalah suku-suku dalam binomial dan n adalah eksponen atau pangkat dari binomial tersebut.

Rumus untuk ekspansi binomial adalah:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r$$

Contoh Soal

1. Tentukan koefisien suku ke-5 dari $(3x + y)^7$.

   Penyelesaian:

   $n = 7$, $a = 3x$, $b = y$, $r = 4$

   Suku ke-5:

   $${}_{15}C_4(3x)^{7-4}(y)^4 = \frac{15!}{11!4!} \cdot 3^3x^3y^4$$
   $$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \cdot 27x^3y^4$$
   $$= 945x^3y^4$$

   Jadi, koefisien suku ke-5 adalah 945.

2. Hitunglah koefisien x^6 dari $(2 + x^2)^{10}$.

   Penyelesaian:

   Suku umumnya dapat ditulis ${}_{12}C_r(2)^{10-r}(x^2)^r$

   $2r = 6 \rightarrow r = 6$

Sehingga

$_{10}C_3 2^7 x^6 = \frac{10!}{7!3!} \cdot 128x^6$

$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \cdot 128x^6$

$= 15.360x^6$

Jadi, koefisiennya adalah 15.360

Pojok Matematika

Kramp: Tokoh Dibalik Simbol Faktorial

- Christian Kramp, seorang matematikawan asal Prancis yang hidup pada akhir abad ke-18 hingga awal abad ke-19 (1760–1826). Ia dikenal sebagai salah satu tokoh penting yang memperkenalkan notasi dan konsep faktorial dalam bentuk modern. Sebelum zamannya, para matematikawan sudah menghitung permutasi dan kombinasi, tetapi belum memiliki simbol khusus untuk menyatakan hasil perkalian berurutan (misalnya 5 × 4 × 3 × 2 × 1). Kramp menyadari perlunya simbol sederhana untuk menyatakan proses ini dalam perhitungan matematika.
- Pada tahun 1808, Kramp secara resmi memperkenalkan simbol "!" sebagai notasi faktorial dalam karyanya tentang analisis matematika. Simbol ini dipilih karena sederhana, mudah ditulis, dan secara visual cukup mencolok untuk menunjukkan operasi khusus. Notasi ini langsung diadopsi oleh banyak matematikawan karena sangat mempermudah penulisan rumus-rumus dalam kombinatorika dan teori peluang. Jadi, misalnya, daripada menulis "1 × 2 × 3 × 4 × 5", cukup tulis 5!
- Dengan notasi faktorial, rumus permutasi (P(n, r) = n! / (n - r)!) dan kombinasi (C(n, r) = n! / r!(n - r)!) bisa ditulis lebih ringkas dan konsisten. Ini sangat penting dalam perkembangan kombinatorika modern, karena banyaknya susunan dan pilihan bisa dihitung jauh lebih cepat dan efisien. Berkat Kramp, simbol faktorial menjadi bagian tak terpisahkan dari matematika — dari pelajaran dasar di sekolah hingga aplikasi lanjutan dalam ilmu komputer dan statistika.

Rangkuman

▷ Permutasi merupakan cara untuk menyusun objek-objek yang dibentuk dari n unsur, yang diperoleh dari n unsur atau sebagian unsur.

▷ Notasi faktorial

- $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, untuk n bilangan bulat positif
- $1! = 1$ dan $0! = 1$

▷ Permutasi dengan semua unsur berbeda.

$P(n, n) = n!$

▷ Permutasi dengan sebagian unsur yang berbeda.

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ untuk $r < n$

▷ Permutasi dengan beberapa unsur yang sama

$P = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}$

dengan:

1) unsur yang sama tidak dibedakan
2) $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

▷ Permutasi siklis

Permutasi siklis dari n objek adalah $(n-1)!$

▷ Kombinasi adalah suatu permutasi tanpa memperhatikan unsur yang terpilih.

▷ Kombinasi dengan semua unsur berbeda

$C(n, n) = 1$

▷ Kombinasi dengan sebagian unsur berbeda

$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ untuk $r < n$.

Latihan Soal

1. Diketahui $P(n, 5) = 8 \times P((n - 1), 4)$. Nilai dari $4n - 5$ adalah…

   a. 23
   b. 27
   c. 31
   d. 35
   e. 39

2. Pada kompetisi bola basket yang diikuti oleh 6 regu, panitia menyediakan 6 tiang bendera. banyak susunan yang berbeda untuk memasang bendera tersebut adalahadalah …

   a. 720 cara
   b. 360 cara
   c. 240 cara
   d. 120 cara
   e. 36 cara

3. Banyak susunan kata yang dapat dibentuk dari kata "KARAKTER" adalah….

   a. 5.020
   b. 180
   c. 3.020
   d. 420
   e. 5.040

4. Rapat pengurus OSIS diikuti oleh ketua, wakil ketua, sekretaris, dan 3 anggota lainnya. Mereka akan duduk mengelilingi meja bundar. Jika ketua harus duduk diantara wakil ketua dan sekretaris, banyak cara duduk dalam rapat tersebut adalah …

   a. 48
   b. 36
   c. 24
   d. 12
   e. 6

5. Sebuah panitia yang terdiri atas 5 orang akan dibentuk dari 6 laki-laki dan 3 perempuan, Banyak cara panitia dapat terbentuk jika harus terdiri atas 3 laki-laki dan 2 perempuan adalah …

   a. 96
   b. 72
   c. 60
   d. 30
   e. 24

6. Seorang peternak akan membeli 3 ekor sapi dan 2 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 7 ekor sapi dan 4 ekor kambing. Banyak cara berbeda peternak memilih ternak-ternak tersebut adalah …

   a. 421
   b. 210
   c. 168
   d. 140
   e. 70

7. Banyak segitiga yang dapat dibentuk dari 9 titik tanpa ada 3 titik yang segaris adalah …

   a. 81
   b. 82
   c. 83
   d. 84
   e. 85

8. Jika $C((n \quad 3), 2) = 36$, nilai n yang memenuhi adalah …

   a. 3
   b. 4
   c. 6
   d. 12
   e. 15

9. Nilai konstanta dari hasil ekspansi $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)^6$ adalah …

a. 1
b. 2
c. 8
d. 15
e. 20

10. Koefisien x^5y^3 dari penjabaran binomial $(x - 2y)^8$ adalah…

a. 448
b. −448
c. 224
d. −224
e. 312

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 12 BAB 3

Referensi

Blitzer, R. (2013). *Algebra and Trigonometry* (5th ed.). Boston: Pearson Education.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd ed.). Wiley.

Griffiths, A. J. F., Wessler, S. R., Carroll, S. B., & Doebley, J. (2019). *Introduction to Genetic Analysis* (12th ed.). W.H. Freeman and Company.

Kramp, C. (1808). *Éléments d'arithmétique universelle*. Strasbourg: Levrault.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pierce, B. A. (2017). *Genetics: A Conceptual Approach* (6th ed.). W.H. Freeman and Company.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.

Russell, E., & Jarvis, F. (2006). *Mathematics of Sudoku I.* Mathematical Spectrum, 39(1), 15–22.

Setiawan, A. & Rahayu, D. (2021). *Pengantar Kombinatorika dan Aplikasinya dalam Pendidikan Matematika.* Jurnal Pendidikan Matematika, 9(2), 123–135.

Sudrajat, D. (2014). *Permutasi dan Kombinasi: Materi dan Soal.* Bandung: Pustaka Setia.

Suharta, E. (2017). *Matematika untuk SMA/MA Kelas XII Program IPA.* Jakarta: Erlangga.

Sullivan, M. (2016). *Precalculus: Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry* (3rd ed.). Pearson.

Taalman, L. (2009). Taking Sudoku Seriously: *The Math Behind the World's Most Popular Pencil Puzzle*. Mathematics Magazine, 82(5), 331–333.

BAB 4

PELUANG KEJADIAN MAJEMUK

Karakter Pelajar Pancasila

▷ **Mandiri**

Menghitung peluang kejadian majemuk dengan mandiri dan sistematis, serta mengaplikasikan konsep peluang dalam kehidupan sehari-hari untuk memecahkan masalah probabilitas yang ditemui di masyarakat..

▷ **Bernalar Kritis**

Menganalisis kejadian majemuk dalam percobaan acak, serta menyelesaikan soal peluang secara kritis menggunakan rumus-rumus matematika peluang yang relevan dengan konsep kejadian saling bebas, saling lepas, dan bersyarat.

Kata Kunci: Perubahan Sosial, Globalisasi, Masalah Sosial, Masyarakat, Urbanisasi, Masyarakat.

Tujuan Pembelajaran: Menghubungkan Peluang dengan Kehidupan Nyata

1. Menguraikan Konsep Peluang Kejadian Majemuk

▷ Menyampaikan pemahaman tentang peluang majemuk secara umum.

▷ Menjelaskan berbagai konsep dasar dalam peluang majemuk yang terjadi pada percobaan acak.

2. Mengidentifikasi Fakta pada Peluang Kejadian Majemuk

▷ Mengenali kejadian-kejadian yang saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat dalam percobaan acak.

▷ Mengidentifikasi perbedaan dan hubungan antara kejadian-kejadian tersebut dalam suatu percobaan.

3. Mendeskripsikan Peluang Kejadian Majemuk

- ▷ Menjelaskan bagaimana peluang kejadian-kejadian yang saling bebas, saling lepas, dan bersyarat dapat diterapkan pada percobaan acak.
- ▷ Memberikan contoh untuk memperjelas deskripsi tentang peluang kejadian-kejadian tersebut.

4. Menentukan Peluang Kejadian Majemuk

- ▷ Menghitung peluang kejadian-kejadian majemuk yang saling bebas, saling lepas, dan bersyarat dalam percobaan acak.
- ▷ Menyelesaikan masalah probabilitas terkait kejadian-kejadian tersebut menggunakan rumus yang sesuai.

5. Menyelesaikan Masalah Peluang Kejadian Majemuk

- ▷ Menggunakan pengetahuan tentang peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan bersyarat untuk memecahkan soal yang relevan.
- ▷ Mengaplikasikan metode yang tepat untuk menyelesaikan berbagai tipe soal peluang majemuk.

6. Menyajikan Masalah Terkait Peluang Kejadian Majemuk

- ▷ Menyusun dan mengajukan masalah yang berkaitan dengan peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan bersyarat.
- ▷ Menyajikan soal-soal probabilitas yang relevan untuk digunakan dalam latihan atau pengujian konsep peluang majemuk.

1. Ruang Sampel

Ruang sampel merupakan himpunan semua kemungkinan hasil yang dapat terjadi dalam suatu percobaan atau eksperimen acak. Setiap elemen dalam ruang sampel disebut sebagai sampel atau hasil percobaan. Ruang sampel sering dilambangkan dengan S. Nilai ruang sampel dari suatu percobaan akan berbeda-beda tergantung pada tujuan percobaan tersebut atau tergantung pada hasil yang diamati.

Selain ruang sampel, terdapat titik sampel yang merupakan setiao anggota dari ruang sampel. Ruang sampel dan titik sampel saling berkaitan, karena setiap kemungkinan hasil dalam ruang sampel akan menghasilkan satu titik sampel atau *sample point*.

Perhatikan contoh berikut.

1) Pelemparan sebuah dadu

Sebuah Dadu – Freepik.com

Ruang sampelnya adalah S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

2) Pelemparan sekeping uang logam sebanyak dua kali

Koin Tampak Depan dan Belakang – IDXchannel.com

Ruang sampelnya adalah S = {GG, AG, AG, AA} dengan G = Gambar dan A = Angka.

Pada pembahasan bab ini, banyak anggota ruang sampel dicari atau dihitung dengan menggunakan permutasi dan kombinasi.

Contoh Soal

1. Terdapat 7 buah bola yang diberi label huruf A, B, C, D, E, F, dan G di dalam sebuah kantong. Akan diambil dua buah bola secara acak dari dalam kantong tersebut, tentukan banyak anggota ruang sampel dari kejadian tersebut.

   Penyelesaian:

   Memilih 2 dari 7 secara acak, banyak anggota ruang sampelnya adalah ${}_7C_2 = 21$.

   Apabila dicacah, ruang sampelnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

   {(A, B); (A, C); (A, D); (A, E); (A, F); (A, G); (B, C); (B, D); (B, E); (B, F); (B, G); (C, D); (C, E); (C, F); (C, G); (D, E); (D, F); (D, G); (E, F); (E, G); (F, G)}

2. Raisa, Hadian, Mala, Thomas, dan Anggita akan berfoto secara berjajar. Tentukan banyak anggota ruang sampel dari kejadian tersebut.

   Penyelesaian:

   Banyak anggota ruang sampel dari kejadian tersebut adalah banyaknya cara menyusun 5 orang pada 5 tempat yang tersedia. Posisi foto berjajar, maka urutan diperhatikan sehingga dapat dihitung dengan menggunakan permutasi, yaitu ${}_5P_5 = 5! = 120$ kejadian.

3. Ada 7 orang terdiri dari 4 orang laki-laki dan 3 orang perempuan mengikuti seleksi lanjutan lomba debat bahasa Indonesia. Dari ketujuh orang tersebut akan dipilih 3 orang terbaik sebagai tim untuk mewakili sekolah dalam lomba debat tingkat Kota. Tentukanlah:

   a. Ruang sampel kejadian tersebut,

   b. Kejadian A = {kejadian tim terpilih hanya terdapat 1 perempuan}

   Penyelesaian:

   a. Memilih 3 dari 7 secara acak, banyak anggota ruang sampelnya adalah ${}_7C_2 = 35$. Jika dicacah, ruang sampelnya dapat dinyatakan sebagai berikut: misalnya untuk laki-laki L (L1, L2, L3, L4) dan untuk perempuan P (P1, P2, P3), sehingga ruang sampelnya:

   {(L1, L2, L3), (L1, L2, L4), (L1, L2, P1), (L1, L2, P2), (L1, L2, P3), (L1, L3, L4), (L1, L3, P1), (L1, L3, P2), (L1, L3, P3), (L1, L4, P1), (L1, L4, P2), (L1, L4, P3), (L1, P1, P2), (L1, P1, P3), (L1, P2, P3), (L2, L3, L4), (L2, L3, P1), (L2, L3, P2), (L2, L3, P3), (L2, L4, P1), (L2, L4, P2), (L2, L4, P3), (L2, P1, P2), (L2, P1, P3), (L2, P2, P3), (L3, L4, P1), (L3, L4, P2), (L3, L4, P3), (L3, P1, P2), (L3, P1, P3), (L3, P2, P3), (L4, P1, P2), (L4, P1, P3), (L4, P2, P3), (P1, P2, P3)}.

   b. Kejadian A artinya memilih 2 dari 4 orang laki-laki dan 1 dari 3 orang perempuan, maka banyak anggota kejadian A adalah ${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 6 \times 3 = 18$. Kejadian A dapat dicacah sebagai berikut:

   {(P1, L1, L2), (P1, L1, L3), (P1, L1, L4), (P1, L2, L3), (P1, L2, L4), (P1, L3, L4), (P2, L1, L2), (P2, L1, L3), (P2, L1, L4), (P2, L2, L3), (P2, L2, L4), (P2, L3, L4),(P3, L1, L2), (P3, L1, L3), (P3, L1, L4), (P3, L2, L3), (P3, L2, L4), (P3, L3, L4)}.

Pojok Matematika

Ilusi Keberuntungan

- Ilusi keberuntungan, atau *gambler's fallacy*, merupakan kesalahan logika yang terjadi ketika seseorang meyakini bahwa hasil dari suatu peristiwa acak akan dipengaruhi oleh hasil-hasil sebelumnya. Misalnya, jika sebuah koin telah menunjukkan sisi "gambar" sebanyak lima kali berturut-turut, seseorang mungkin akan beranggapan bahwa sisi "angka" akan lebih mungkin muncul pada lemparan berikutnya. Padahal, secara matematis, setiap lemparan koin bersifat independen, dan peluang munculnya "angka" maupun "gambar" tetap 50% tanpa dipengaruhi oleh hasil sebelumnya.
- Fenomena ini disebabkan oleh kecenderungan otak manusia dalam mencari pola, bahkan dalam rangkaian kejadian yang acak. Ketidakseimbangan dalam hasil sering kali menimbulkan anggapan bahwa suatu "kompensasi" akan segera terjadi, seolah-olah peluang bersifat adil atau harus seimbang dalam jangka pendek. Dalam kenyataannya, hukum probabilitas tidak bekerja demikian, terutama dalam kejadian acak yang independen satu sama lain.

- Pemahaman yang keliru mengenai konsep peluang ini dapat berdampak pada pengambilan keputusan, baik dalam konteks perjudian, investasi, maupun situasi sehari-hari. Oleh karena itu, dalam mempelajari peluang, termasuk peluang kejadian majemuk, penting untuk mengandalkan prinsip-prinsip matematika yang objektif, bukan pada intuisi yang sering kali menyesatkan.

2. Kejadian

Kejadian adalah himpunan dari hasil-hasil yang mungkin dari suatu peristiwa. Misal pada percobaan melempar sebuah dadu sisi enam, maka:

1) ruang sampelnya S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, dan banyak anggota ruang sampel tersebut adalah n(S) = 6.

2) kejadian E_1 memenuhi syarat tertentu, misalnya E = kejadian muncul bilangan genap, maka E_1 = {2, 4, 6}, banyak kejadian tersebut adalah n(E) = 3.

Spinner Wheel Menggunakan Konsep Peluang – Pinterest.com

Frekuensi Relatif

Distribusi frekuensi relatif menunjukkan perbandingan antara frekuensi suatu kelas dengan jumlah seluruh pengamatan, yang menggambarkan proporsi data dalam setiap kelas interval. Distribusi ini umumnya didapatkan dengan cara membagi frekuensi dengan total data pada suatu peristiwa atau percobaan.

Frekuensi relatif dapat dihitung dengan rumus:

$$F_{(R)} = \frac{Banyak\ hasil\ yang\ dimaksud}{Banyak\ percobaan}$$

Contoh Soal

1. Hasil pelemparan sebuah dadu sebanyak 1.200 kali dicatat sebagai berikut.

Mata Dadu	1	2	3	4	5	6
Frekuensi	180	240	195	190	185	210

Tentukan:

a. frekuensi relatif muncul mata dadu 2,

b. frekuensi relatif muncul mata dadu ganjil.

Penyelesaian:

a. Frekuensi relatif muncul mata dadu 2 adalah $F_{(R)} = \frac{240}{1.200}$.

b. Frekuensi relatif muncul mata dadu ganjil (1, 3, 5) adalah

$$F_{(R)} = \frac{180}{1.200} + \frac{195}{1.200} + \frac{185}{1.200} = \frac{560}{1.200}.$$

2. Dalam sebuah percobaan melempar sebuah koin 50 kali, sisi angka muncul sebanyak 30 kali. Tentukan frekuensi relatif untuk sisi gambar.

Penyelesaian:

Sisi gambar muncul sebanyak 30 kali, artinya sisi gambar muncul sebanyal 50 − 30 = 20, sehingga frekuensi relatif muncul sisi gambar adalah F(R) = $\frac{20}{50}$.

Peluang Kejadian

Ilustasi Penerapan Formasi Duduk dengan Peluang– Freepik.com

Misalkan S merupakan ruang sampel suatu percobaan yang dilakukan sebanyak n kali, dan A merupakan suatu kejadian dengan frekuensi muncuknya A yaitu n(A), maka peluang kejadian A adalah:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Apabila nilai n semakin besar, maka $\frac{n(A)}{n}$ konvergen ke suatu nilai sehingga limitnya didefinisikan sebagai peluang kejadian A. Apabila suatu percobaan menghasilkan n titik contoh yang masing-masing berpeluang sama dan kejadian A terjadi dengan tepat k cara, di mana k merupakan anggota dari titik contoh, maka:

$$P(A) = \frac{k}{n} \text{ untuk } k \le n$$

Kejadian A pada ruang sampel S dikatakan pasti terjadi (kepastian) jika A = S dan dikatakan kemustahilan jika A = Ø. Peluang-peluang tersebut memiliki nilai:

$$P(S) = \frac{n}{n} = 1, \text{ sedangkan } P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$$

Dengan demikian, peluang suatu kepastian bernilai 1 dan kemustahilan bernilai 0. Dapat disimpulkan bahwa peluang suatu kejadian adalah bilangan dari 0 sampai 1.

Contoh Soal

1. Alina, Bagas, Cindy, Dean, dan Ela akan berfoto. Tentukan peluang Alina dan Ela selalu berdampingan.

   Penyelesaian:

   Banyak anggota ruang sampel adalah

   $n(S) = {}_5P_5 = 5! = 120$

   E adalah kejadian Alina dan Ela selalu berdampingan, maka banyak kejadian adalah

   $n(E) = {}_4P_4 \times 2! = 4! \times 2! = 48.$

   Jadi peluang kejadian tersebut adalah $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}.$

2. Xaviera dan Yoona merupakan pengurus kelas yang bertugas pada hari Senin sampai Sabtu. Peluang keduanya bertugas pada sembarang hari tersebut adalah sama. Tentukan peluang bahwa mereka berdua terjadwal piket:

   a. pada hari yang sama,

   b. pada hari yang berurutan, dan

   c. pada hari-hari yang tidak berurutan.

   Penyelesaian:

   Xaviera dan Yoona dapat memilih hari secara acak, ruang sampel S adalah $n(S) = 6 \times 6 = 36$

   a. A = kejadian Xaviera dan Yoona bertugas pada hari yang sama

      Terdapat 6 kemungkinan pasangan hari yang sama, yaitu

      A = {(Senin, Senin); (Selasa, Selasa); (Rabu, Rabu); (Kamis, Kamis); (Jumat, Jumat); (Sabtu, Sabtu)} → n(A) = 6

      Jadi, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

   b. B = kejadian Xaviera dan Yoona bertugas pada hari yang berurutan

      Ada 5 kombinasi hari yang berurutan, yaitu (Senin, Selasa); (Selasa, Rabu); (Rabu, Kamis); (Kamis, Jumat); dan (Jumat, Sabtu).

      Urutan antara Xaviera dan Yoona diperhitungkan (misalnya, Xaviera piket Senin dan Yoona Selasa ≠ sebaliknya), maka setiap kombinasi memiliki dua susunan, sehingga total pasangan yang memenuhi adalah $n(B) = 5 \times 2 = 10$

      Jadi, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$

   c. C = kejadian Xaviera dan Yoona bertugas pada hari-hari yang tidak berurutan

      Dari seluruh pasangan hari yang berbeda yang mungkin dipilih yaitu ${}_6C_2 \times 2 = 15 \times 2 = 30.$

      Kemudian dikurangi pasangan hari yang berurutan (bagian b), sehingga $n(C) = 30 - 10 = 20.$

      Jadi, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$

3. Jika 2 huruf dipilih secara acak dari huruf-huruf pada kata ‘LAMPION’, tentukan peluang bahwa 2 huruf yang terpilih:

a. termasuk huruf ‘N’,

b. keduanya huruf vokal.

Penyelesaian:

Banyak cara memilih 2 dari 7 huruf adalah

$n(S) = {}_7C_2 = 21$

a. X = kejadian huruf terpilih termasuk ‘N’

X = {LN, AN, MN, PN, IN, ON} → n(X) = 6

Jadi, P(A) = $\frac{n(X)}{n(Y)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

b. Y = kejadian huruf terpilih keduanya huruf vokal

Dalam kata ‘LAMPION’, huruf vokalnya adalah A, I, O → ada 3 huruf

Banyak cara memilih 2 dari 3 huruf vokal adalah

$n(Y) = {}_3C_2 = 3$

Apabila dicacah, banyak anggota kejadian huruf terpilih keduanya huruf vokal adalah

Y = {AI, AO, IO} → n(Y) = 3

Jadi, P(Y) = $\frac{n(Y)}{n(S)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Pojok Matematika

Ramalan Cuaca

▷ Banyak orang mengira bahwa ramalan cuaca adalah prediksi pasti tentang apa yang akan terjadi. Misalnya, ketika disebutkan “peluang hujan 70%,” sebagian besar orang mengartikannya sebagai kepastian bahwa hujan akan turun. Padahal, angka tersebut sebenarnya menunjukkan probabilitas, yaitu tingkat kemungkinan hujan terjadi di suatu wilayah tertentu dalam jangka waktu yang ditentukan.

▷ Dalam konteks meteorologi, peluang hujan 70% berarti bahwa, berdasarkan model cuaca dan data historis, terdapat kemungkinan 70% bahwa hujan akan terjadi di wilayah tersebut. Interpretasi lainnya adalah bahwa hujan diperkirakan akan turun di 70% dari total area yang dimaksud. Kedua interpretasi ini menunjukkan bahwa ramalan cuaca bukanlah kepastian, melainkan hasil dari perhitungan statistik dan pemodelan kompleks terhadap pola atmosfer.

▷ Dengan memahami bahwa ramalan cuaca adalah bentuk penerapan konsep peluang, masyarakat dapat membuat keputusan yang lebih rasional dalam merencanakan aktivitas. Selain itu, hal ini menunjukkan bagaimana teori peluang dan kejadian majemuk tidak hanya digunakan dalam matematika abstrak, tetapi juga memiliki penerapan nyata dalam kehidupan sehari-hari, termasuk dalam bidang sains dan teknologi.

3. Frekuensi Harapan

Ilustrasi Peluang Pemenang dalam Undian – Pinterest.com

Dalam sebuah percobaan, frekuensi harapan dihitung dengan mengalikan peluang suatu kejadian dengan jumlah pengulangan percobaan. Jika E adalah suatu kejadian dalam ruang sampel S dan P(E) merupakan peluang terjadinya E dalam n kali percobaan, maka frekuensi harapan kejadian E didefinisikan:

$$F(E) = P(E) \times n$$

Contoh Soal

1. Sebuah dadu dilemparkan sebanyak 90 kali, tentukan frekuensi harapan muncul mata dadu berjumlah lebih dari 9.

   Penyelesaian:

   Saat dua buah dadu dilemparkan, jumlah mata dadu yang muncul dapat berkisar antara 2 hingga 12. Untuk menghitung peluang munculnya jumlah mata dadu lebih dari 9, perlu diketahui jumlah kombinasi yang menghasilkan jumlah lebih dari 9.

   Jumlah mata dadu yang lebih dari 9 adalah: 10, 11, dan 12.

   Kemungkinan jumlah dadu yang menghasilkan jumlah lebih dari 8. Total kombinasi pada dua dadu adalah: $n = 6 \times 6 = 36$

   Kombinasi untuk jumlah lebih dari 9:

   10: (4,6), (5,5), (6,4) → 3 kombinasi

   11: (5,6), (6,5) → 2 kombinasi

   12: (6,6) → 1 kombinasi

   Jumlah kombinasi yang menghasilkan jumlah lebih dari 9 adalah: 3 + 2 + 1 = 6.

   Jadi, ada 6 kombinasi yang menghasilkan jumlah mata dadu lebih dari 9.

   P(jumlah mata dadu lebih dari 9) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

   Jadi, frekuensi harapan = $\frac{1}{6} \times 90 = 15$ kali.

2. Dalam sebuah kotak terdapat beberapa buah bola lampu. Peluang bola lampu rusak satu peti adalah 0,15. Berapa banyak lampu yang rusak jika satu kotak memuat 400 bola lampu?

Penyelesaian:

Banyaknya bola lampu, n = 400

P(bola lampu rusak) = 0,15

Jadi, frekuensi harapan = 0,15 × 400 = 60 buah

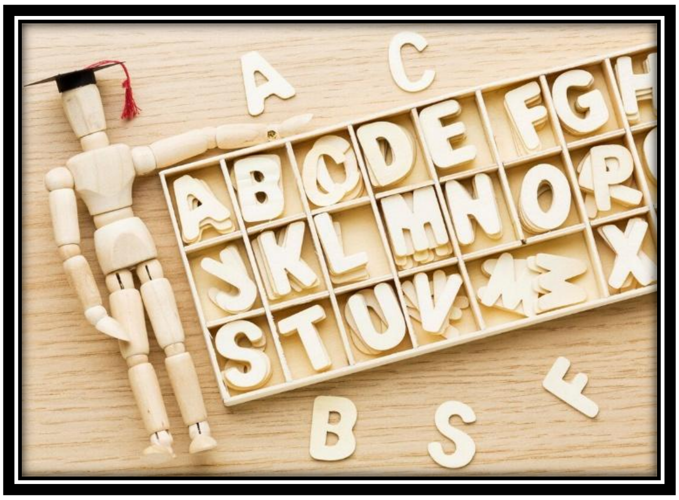
∴ Sebanyak 60 buah bola lampu yang mungkin rusak dalam satu kotak tersebut.

Pojok Matematika

Apakah Undian Bisa Dimenangkan?

- ▷ Undian sering kali memberikan harapan besar kepada pesertanya, terutama karena hadiah yang ditawarkan sangat menarik. Namun, dari sudut pandang matematika, peluang untuk memenangkan undian—terutama yang berskala nasional—biasanya sangat kecil. Misalnya, jika sebuah undian memiliki satu pemenang dan total peserta mencapai satu juta orang, maka peluang seseorang untuk menang hanyalah 1 banding 1.000.000 atau 0,0001%.
- ▷ Meskipun demikian, banyak orang tetap tertarik mengikuti undian karena faktor psikologis seperti harapan, optimisme, atau karena kisah sukses pemenang sebelumnya yang dianggap bisa "menular". Padahal, setiap tiket atau nomor undian memiliki peluang yang sama dan bersifat acak. Tidak ada strategi khusus yang dapat menjamin kemenangan dalam sistem undian yang adil dan diatur dengan benar, karena tidak ada pengaruh dari kejadian sebelumnya maupun kemampuan pribadi.
- ▷ Pemahaman mengenai peluang sangat penting agar tidak menaruh ekspektasi berlebihan dalam mengikuti undian. Hal ini juga dapat membantu dalam membuat keputusan yang lebih bijak, terutama jika undian tersebut melibatkan biaya partisipasi. Dengan menyadari betapa kecilnya probabilitas untuk menang, seseorang dapat menilai apakah mengikuti undian merupakan pilihan yang rasional atau sekadar hiburan semata.

4. Komplemen Suatu Kejadian



Ilustrasi Peluang Mengambil Suatu Huruf – Freepik.com

Kejadian bukan A dari himpunan S dilambangkan dengan simbol A’ atau A^C dan disebut komplemen dari A. Apabila A’ memiliki a elemen dan S memiliki n elemen, maka A’ memiliki n – a elemen. Jadi P(A’) merupakan peluang tidak terjadinya A. Secara matematis, peluang dari komplemen suatu kejadian dapat dihitung dengan rumus:

$$\begin{aligned} P(A') &= \frac{n-a}{a} \\ &= \frac{n}{n} - \frac{a}{n} \\ &= 1 - \frac{a}{n} \\ &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Jika peluang hari esok akan turun hujan adalah 0,65; tentukan peluang bahwa cuaca akan cerah esok hari.

   Penyelesaian:

   Misalkan X = {kejadian hari esok akan hujan}

   Maka X^C = {kejadian hari esok akan cerah}

   sehingga:

   $$\begin{aligned} P(X^C) &= 1 - P(X) \\ &= 1 - 0{,}65 \\ &= 0{,}35 \end{aligned}$$

2. Satu huruf dikeluarkan dari kata ‘KOMBINASI’ secara acak. Tentukan peluang terambilnya

   a. huruf I,

   b. bukan huruf I

   Penyelesaian:

   a. Dari kata KOMBINASI (9 huruf), maka ruang sampel:

$S = \{K, O, M, B, I, N, A, S, I\}$;

$n(S) = 9$

Terdapat dua huruf I dalam kata KOMBINASI (pada posisi ke-5 dan ke-9). Jika kejadian E = {huruf I muncul}, maka:

$n(E) = 2$

Jadi, $P(E) = \frac{2}{9}$.

b. Peluang terambilnya bukan huruf M adalah komplemen dari peluang terambilnya huruf M, yaitu:

$P(E^C) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

3. Terdapat 2 orang laki-laki dan 3 orang perempuan akan berfoto secara berjajar. Tentukan peluang bahwa laki-laki tidak foto bersebelahan.

Penyelesaian:

Misalkan K = {kejadian laki-laki foto bersebelahan}, maka

$P(K) = \frac{4!\,2!}{6!} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

sehingga K^C = {kejadian laki-laki foto bersebelahan}, yaitu:

$P(K^C) = 1 - P(K)$

$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

Pojok Matematika

Peluang dan Dunia Kripto

- Pasar kripto dikenal dengan volatilitasnya yang tinggi, di mana harga aset digital seperti Bitcoin atau Ethereum dapat berubah secara drastis dalam waktu singkat. Meskipun banyak analis dan investor mencoba memprediksi pergerakan harga melalui analisis teknikal dan fundamental, kenyataannya fluktuasi harga kripto tetap memiliki unsur ketidakpastian yang sangat tinggi. Dalam hal ini, teori peluang digunakan untuk mengukur dan mengelola risiko, bukan untuk memberikan prediksi yang pasti.
- Beberapa pendekatan matematis seperti simulasi Monte Carlo dan model probabilistik lainnya digunakan untuk memperkirakan skenario pergerakan harga aset kripto. Namun, karena banyak faktor eksternal yang sulit diprediksi—seperti kebijakan pemerintah, sentimen pasar, atau kejadian global—hasil prediksi tersebut tetap berupa estimasi dengan tingkat keyakinan tertentu, bukan kepastian. Dengan kata lain, peluang dalam konteks pasar kripto digunakan untuk memahami rentang kemungkinan, bukan untuk menjamin hasil tertentu.
- Pemahaman terhadap konsep peluang dan ketidakpastian sangat penting bagi siapa pun yang terlibat dalam dunia kripto. Tanpa pendekatan yang berbasis data dan probabilitas, pengambilan keputusan investasi dapat menjadi sangat spekulatif dan berisiko tinggi. Oleh karena itu, pendekatan matematis dan pemahaman statistik menjadi salah satu kunci untuk menavigasi pasar yang sangat dinamis ini dengan lebih bijak.

5. Frekuensi Majemuk

Dua Kejadian Saling Lepas

Dua kejadian dikatakan saling lepas (*mutually exclusive*) jika tidak bisa terjadi secara bersamaan. Artinya, jika salah satu kejadian terjadi, maka kejadian yang lain tidak mungkin terjadi. Untuk kejadian yang saling lepas (saling asing/saling eksklusif), maka $P(A \cap B) = P(\emptyset)$.

Jika A dan B merupakan dua kejadian yang saling lepas, maka:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

karena tidak ada irisan (tidak terjadi bersamaan), maka cukup dijumlahkan.

Jika hubungan antara $P(A \cup B)$, $P(A)$, dan $P(B)$, terdapat irisan antara A dan B, $P(A \cap B)$ diperoleh

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Berdasarkan penjelasan, dapat disimpulkan bahwa:

Apabila E_1 dan E_2 merupakan kejadian-kejadian dalam suatu percobaan dan jika:

1) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, maka E_1 dan E_2 dinamakan kejadian yang saling lepas dan $P(E_1 \cup E_2 = P(E_1) + P(E_2)$;
2) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, maka E_1 dan E_2 dinamakan kejadian yang tidak saling lepas dan $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Contoh Soal

1. Dalam suatu kantong terdapat 4 bola berwarna merah (M), 8 bola berwarna hijau (H), 7 bola berwarna kuning (K) dan 5 bola berwarna biru (B). Jika semua bola serupa dan diambil satu bola secara acak, tentukan peluang untuk mendapatkan bola berwarna:

   a. hijau P(H),

   b. merah P(M),

   c. hijau dan merah $P(H \cap M)$,

   d. merah atau kuning $P(M \cup K)$.

   Penyelesaian:

   Banyaknya bola dalam kantong $n(S) = 4 + 8 + 7 + 5 = 24$

   $n(M) = 4$, $n(H) = 8$, $n(K) = 7$, $n(B) = 5$

   $n(H \cap M) = 0$, karena tidak mungkin bola yang diambil berwarna hijau dan merah (bola yang diambil hanya satu).

   a. $P(H) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

   b. $P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

   c. $P(H \cap M) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{0}{24} = 0$

   d. $P(B \cup K) = P(B) + P(K)$

   $= \frac{5}{24} + \frac{7}{24}$

   $= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

Peluang Baterai Terambil – Freepik.com

2. Dalam sebuah kotak terdapat 10 buah baterai baru dan 8 buah baterai bekas. Diketahui bahwa 2 baterai baru dan 3 baterai bekas mengalami kebocoran. Jika satu baterai diambil secara acak dari dalam kotak, tentukan peluang untuk mendapatkan baterai tersebut merupakan:

   a. baterai baru,

   b. baterai bekas,

   c. baterai yang bocor,

   d. baterai bekas yang bocor,

   e. baterai bekas atau baterai yang bocor.

   Penyelesaian:

   Jika S ruang sampel, maka n(S) = 10 + 8 = 18.

   Kejadian E_1 = {baterai baru yang terambil}, n(E_1) = 10

   Kejadian E_2 = {baterai bekas yang terambil}, n(E_2) = 12

   Kejadian E_3 = {baterai bocor yang terambil}, n(E_3) = 2 + 3 = 5

   sehingga untuk $E_1 \cap E_3$ = {baterai bekas yang bocor} = 3

   Kejadian E_1 dan E_2 bersifat saling lepas, sehingga diperoleh:

   a. $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

   b. $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{18} = \frac{9}{9}$

   c. $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{5}{18}$

   d. $P(E_1 \cap E_3) = \frac{n(E_1 \cap E_3)}{n(S)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

   e. Kejadian terambilnya baterai bekas atau baterai yang bocor terdapat irisan, sehingga:

      $P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_3)$

      $= \frac{5}{9} + \frac{5}{18} - \frac{1}{6}$

      $= \frac{10}{18} + \frac{5}{18} - \frac{3}{18}$

      $= \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Dua Kejadian Saling Bebas

Kumpulan Bola Warna-warni – Freepik.com

Dua kejadian dikatakan saling bebas (*independent events*) jika terjadinya salah satu kejadian tidak memengaruhi terjadinya kejadian yang lain. Jadi, hasil dari satu percobaan tidak bergantung pada hasil percobaan yang lain.

a. Bola pertama dikembalikan sebelum bola kedua diambil

Perhatikan contoh berikut.

Pada percobaan pengambilan dua bola satu per satu dengan pengembalian. Misalnya, sebuah kotak berisi 4 bola biru dan 3 bola kuning. Pada pengambilan pertama, peluang terambil bola kuning = $\frac{3}{7}$. Jika sebelum pengambilan kedua, bola dikembalikan lagi ke dalam kotak, maka peluang terambil bola kuning kedua tetap $\frac{3}{7}$. Dalam kasus ini kejadiannya saling bebas. Karena peluang munculnya kejadian pengambilan bola kuning kedua tidak dipengaruhi oleh pengambilan bola kuning pertama.

Jika E_1 dan E_2 adalah dua kejadian dengan syarat bahwa peluang bagi kejadian E_1 tidak mempengaruhi kejadian E_2, maka E_1 dan E_2 disebut sebagai **kejadian-kejadian saling bebas** dan berlaku rumus:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

Contoh Soal

1. Dalam sebuah tas sekolah terdapat 6 buku sejarah dan 9 buku kimia. Dua buku diambil secara acak dari dalam tas satu per satu. Jika buku pertama yang diambil dimasukkan kembali ke dalam tas sebelum buku kedua diambil, tentukan peluang yang terambil jika:

   a. buku pertama sejarah dan buku kedua kimia

   b. buku pertama kimia dan buku kedua kimia

   Penyelesaian:

   Tas berisi 15 buku (6 buku sejarah dan 9 buku kimia), sehingga n(S) = 15.

   Misalkan:

   E_1 = {kejadian terambil buku sejarah}, maka $n(E_1) = 6$

   E_2 = {kejadian terambil buku kimia}, maka $n(E_2) = 9$

   a. Peluang terambil buku sejarah lalu buku kimia

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$= \frac{n(E_1)}{n(S)} \times \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$= \frac{6}{15} \times \frac{9}{15}$

$= \frac{6}{25}$

b. Peluang terambil buku kimia lalu buku kimia

$P(E_2 \cap E_2) = P(E_2) \times P(E_2)$

$= \frac{n(E_2)}{n(S)} \times \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$= \frac{9}{15} \times \frac{9}{15}$

$= \frac{9}{25}$

2. Dua lembar kartu diambil secara acak dari 52 kartu bridger satu per satu dengan pengembalian. Tentukan peluang bahwa yang terambil:

a. keduanya kartu sekop,

b. kartu pertama hati dan kartu kedua bergambar,

c. satu kartu hati dan satu kartu bergambar.

Penyelesaian:

Kartu berjumlah 52 lembar, sehingga n(S) = 52.

Misalkan:

E_1 = {kejadian terambil kartu sekop}, maka $n(E_1) = 13$

E_2 = {kejadian terambil kartu hati}, maka $n(E_2) = 13$

E_3 = {kejadian terambil kartu bergambar}, maka $n(E_3) = 12$

a. Peluang terambil keduanya kartu sekop

$P(E_1 \cap E_1) = P(E_1) \times P(E_1)$

$= \frac{n(E_1)}{n(S)} \times \frac{n(E_1)}{n(S)}$

$= \frac{13}{52} \times \frac{13}{52}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{16}$

b. Peluang terambil kartu hati lalu kartu bergambar

$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \times P(E_3)$

$= \frac{n(E_2)}{n(S)} \times \frac{n(E_3)}{n(S)}$

$= \frac{13}{52} \times \frac{12}{52}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{13}$

$= \frac{3}{52}$

c. Peluang terambil kartu hati dan kartu bergambar secara acak

$P = P(E_2 \cap E_3) + P(E_3 \cap E_2)$

$= \left(\frac{13}{52} \times \frac{12}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \times \frac{12}{52}\right)$

$= \frac{3}{52} + \frac{3}{52}$

$= \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

b. Bola pertama tidak dikembalikan sebelum bola kedua diambil

Dalam contoh kasus di atas, bagaimana jika sebelum pengambilan bola kedua, bola pertama tidak dikembalikan ke dalam kotak? Misalnya, pada pengambilan pertama terambil bola kuning dan peluangnya = $\frac{3}{7}$. Jika bola kuning tersebut tidak dikembalikan ke dalam kotak, maka bola yang tersisa dalam kotak adalah 4 bola biru dan 2 bola kuning. Sehingga peluang terambil bola kuning pada pengambilan yang kedua adalah $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Dengan demikian, untuk pengambilan bola pertama yang tidak dikembalikan, maka peluang pada pengambilan bola kedua bergantung pada hasil pengambilan bola pertama. Kasus seperti ini disebut kejadian bersyarat.

Jika E_1 dan E_2 adalah dua kejadian dengan syarat bahwa peluang bagi kejadian E_1 akan mempengaruhi kejadian E_2, maka E_1 dan E_2 disebut sebagai **kejadian bersyarat tidak saling bebas** dan berlaku rumus:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2 | E_1)$$

$P(E_2 | E_1)$ dibaca peluang kejadian E_2 dengan syarat E_1 telah terjadi atau peluang bersyarat kejadian E_2 setelah diketajui kejadian E_1.

Contoh Soal

1. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 4 bola biru. Jika diambil 2 bola satu per satu tanpa pengembalian, tentukan peluang bola yang terambil berturut-turut berwarna:

   a. biru - merah

   b. merah – merah

   c. merah – biru

   Penyelesaian:

   Banyak bola sebelum pengambilan adalah 6 bola merah + 4 bola biru = 10 bola, maka n(S) = 10.

   Misalkan:

   M = {kejadian terambil bola merah}, maka n(M) = 4

   B = {kejadian terambil bola biru}, maka n(B) = 6

   a. Pada pengambilan pertama terambil bola biru. Tersedia 4 bola biru dari 10 bola, sehingga:

   $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

   Banyak bola sebelum pengambilan kedua adalah 6 bola merah + 3 bola biru = 9 bola. Peluang terambil bola merah dengan syarat bola biru telah terambil pada pengambilan pertama, ditulis $P(M | B)$, yaitu:

   $P(M | B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Jadi, peluang terambil berturut-turut bola berwarna biru – merah adalah

P(B ∩ M) = P(B) x P(M | B)

$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

b. Pada pengambilan pertama terambil bola merah. Tersedia 6 bola merah dari 10 bola, sehingga:

P(M) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Banyak bola sebelum pengambilan kedua adalah 5 bola merah + 4 bola biru = 9 bola. Peluang terambil bola merah dengan syarat bola merah telah terambil pada pengambilan pertama, ditulis P(M | M), yaitu:

P(M | M) = $\frac{5}{9}$

Jadi, peluang terambil berturut-turut bola berwarna merah – merah adalah

P(M ∩ M) = P(M) x P(M | M)

$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

c. Pada pengambilan pertama terambil bola merah. Tersedia 6 bola merah dari 10 bola, sehingga:

P(M) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Banyak bola sebelum pengambilan kedua adalah 5 bola merah + 4 bola biru = 9 bola. Peluang terambil bola biru dengan syarat bola merah telah terambil pada pengambilan pertama, ditulis P(B | M), yaitu:

P(B | M) = $\frac{4}{9}$

Jadi, peluang terambil berturut-turut bola berwarna merah – merah adalah

P(M ∩ M) = P(M) x P(M | M)

$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

2. Dalam sebuah kantong terdapat 7 spidol merah, 8 spidol biru, dan 5 spidol hijau yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Tiga spidol diambil secara acak satu per satu tanpa pengembalian. Tentukan peluang terambilnya ketiga spidol tersebut:

a. berwarna hijau,

b. berturut-turut berwarna merah – biru – hijau.

Penyelesaian:

a. S_1 = {semua spidol dalam kantong sebelum diambil}

$n(S_1) = 20$

A = {pengambilan pertama spidol hijau} → n(A) = 5

P(A) = $\frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

S_2 = {semua spidol dalam kantong, setelah pengambilan pertama}

$n(S_2) = 20 - 1 = 19$

B = {pengambilan kedua spidol hijau setelah pengambilan pertama}

→ n(B | A) = 5 − 1 = 4

$P(B \mid A) = \frac{n(B \mid A)}{n(S_2)} = \frac{4}{19}$

S_3 = {semua spidol dalam kantong, setelah pengambilan kedua}

$n(S_3) = 18$

C = {pengambilan ketiga spidol hijau setelah pengambilan kedua}

$\rightarrow n(C \mid B) = 5 - 2 = 3$

$P(C \mid B) = \frac{n(C \mid B)}{n(S_3)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Kejadian A, B, dan C merupakan kejadian bersyarat, maka

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid B)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{114}$

Jadi, peluang mendapat ketiga spidol hijau adalah $\frac{1}{114}$.

b. $n(S_1) = 20$, $n(S_2) = 19$, $n(S_3) = 18$

Misalkan:

Pengambilan ke-1: E_1 = {1 spidol merah} $\rightarrow n(E_1) = 7$

$P(E1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{7}{20}$

Pengambilan ke-2: E_2 = {1 spidol biru} $\rightarrow n(E_2) = 8$

$P(E_2 \mid E_1) = \frac{n(E_2 \mid E_1)}{n(S_2)} = \frac{8}{19}$

Pengambilan ke-3: E_3 = {1 spidol hijau} $\rightarrow n(E_3) = 5$

$P(E_3 \mid E_2) = \frac{n(E_3 \mid E_2)}{n(S_3)} = \frac{5}{18}$

Kejadian E_1, E_2, dan E_3 merupakan kejadian bersyarat, maka

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \times P(E_2 \mid E_1) \times P(E_3 \mid E_2)$

$= \frac{7}{20} \times \frac{8}{19} \times \frac{5}{18}$

$= \frac{7}{171}$

Jadi, peluang mendapat spidol berturut-turut berwarna merah – biru – hijau adalah $\frac{7}{171}$.

Rangkuman

▷ Pengertian peluang

Apabila suatu percobaan menghasilkan n titik contoh yang masing-masing berpeluang sama dan kejadian A terjadi dengan tepat k cara, di mana k merupakan anggota dari titik contoh, maka:

$$P(A) = \frac{k}{n} \text{ untuk } k \leq n$$

▷ Kisaran nilai peluang

- $0 \leq P(E) \leq 1$, untuk setiap E.
- $P(S) = 1$.
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, untuk E_1 dan E_2 dua kejadian yang saling lepas atau $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

▷ Frekuensi harapan

Dalam sebuah percobaan, frekuensi harapan dihitung dengan mengalikan peluang suatu kejadian dengan jumlah pengulangan percobaan.

$$F(E) = P(E) \times n$$

▷ Komplemen suatu kejadian

Kejadian bukan A dari himpunan S dilambangkan dengan simbol A' atau A^C dan disebut komplemen dari A.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

▷ Kejadian majemuk

- Kejadian saling lepas

  Jika A dan B merupakan dua kejadian yang saling lepas, maka:

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Kejadian saling bebas

  Jika E_1 dan E_2 adalah dua kejadian dengan syarat bahwa peluang bagi kejadian E_1 tidak mempengaruhi kejadian E_2, maka E_1 dan E_2 disebut sebagai kejadian-kejadian saling bebas dan berlaku rumus:

  $$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

- Kejadian bersyarat

  $$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \mid E_1)$$

  $P(E_2 \mid E_1)$ dibaca peluang kejadian E_2 dengan syarat E_1 telah terjadi atau peluang bersyarat kejadian E_2 setelah diketajui kejadian E_1.

- Kejadian majemuk yang melibatkan aturan pencacahan

  Aturan pencacahan (khususnya kombinasi) dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan peluang kejadian majemuk.

Latihan Soal

1. Bu Dina mempunyai 9 butir telur ayam, 3 diantaranya retak. bu Dian mengambil 2 butir telur secara acak untuk membuat kue. peluang mendapatkan 2 telur dalam kondisi baik adalah …

   a. $\frac{5}{12}$
   b. $\frac{1}{3}$
   c. $\frac{7}{12}$
   d. $\frac{1}{3}$
   e. $\frac{1}{6}$

2. Banyak keseluruhan ruang sampel pada percobaan pelemparan 4 buah mata uang logam adalah …

   a. 32
   b. 16
   c. 24
   d. 10
   e. 8

3. Seorang pedagang kue basah akan menjual lima kue putu dan tiga dadar gulung. Jika seseorang akan membeli tiga kue basah sekaligus, peluang yang dibeli merupakan satu kue putu dan dua dadar gulung sadalah ….

   a. $\frac{15}{56}$
   b. $\frac{15}{29}$
   c. $\frac{4}{7}$
   d. $\frac{17}{28}$
   e. $\frac{16}{29}$

4. Panitia beranggotakan tiga orang akan dipilih dari 7 pria dan 5 wanita. peluang yang terpilih paling sedikit 2 pria adalah …

   a. $\frac{7}{11}$
   b. $\frac{7}{12}$
   c. $\frac{5}{11}$
   d. $\frac{5}{8}$
   e. $\frac{6}{11}$

5. Perusahaan listrik suatu wilayah membuat jadwal pemadaman listrik pada 30 komplek perumahan yang ada pada wilayah cakupannya sebagai berikut :

Hari	Jumlah Komplek
Senin	4
Selasa	5
Rabu	3
Kamis	5
Jumat	4
Sabtu	5
Minggu	4

Jika jadwal pemadaman listrik tersebut berlaku secara acak pada semua komplek, peluang terjadi pemadaman listrik di sebuah komplek pada hari Rabu adalah…

a. $\frac{3}{8}$

b. $\frac{1}{6}$

c. $\frac{2}{5}$

d. $\frac{2}{15}$

e. $\frac{1}{10}$

6. Dua keping uang logam dan sebuah dadu dilemparkan bersama-sama sebanyak 72 kali. frekuensi harapan muncul satu sisi gambar dan angka prima pada dadu adalah…

a. 24

b. 48

c. 12

d. 36

e. 18

7. Dua buah dadu dilempar undi bersama-sama sebanyak 540 kali. Frekuensi harapan muncul kedua mata dadu berjumlah 5 adalah …

a. 240 kali

b. 90 kali

c. 270 kali

d. 60 kali

e. 120 kali

8. Dari 30 siswa diketahui 20 siswa suka kimia, 15 siswa suka fisika, dan 10 siswa suka keduanya. jika seorang siswa dipilih secara acak, peluang siswa yang terpilih suka kimia atau fisika adalah …

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{5}{6}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{2}{5}$

9. 30 buah kartu diberi nomor 1 sampai 30. dari kumpulan kartu tersebut diambil secara acak. Peluang terambil kartu dengan bilangan kelipatan 2 atau kelipatan 7 adalah …

a. $\frac{13}{30}$

b. $\frac{17}{30}$

c. $\frac{4}{5}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{7}{10}$

10. Peluang Sari dapat menyelesaikan suatu soal sebesar 0,9 dan peluang Dewi dapat menyelesaikan soal yang sama sebesar 0,6. Peluang mereka berdua dapat menyelesaikan soal tersebut adalah…

a. 0,45

b. 0,30

c. 0,54

d. 0,68

e. 0,50

Referensi

Mlodinow, L. (2009). *The Drunkard's Walk: How Randomness Rules Our Lives*. Vintage Books.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux.

Gigerenzer, G. (2002). *Calculated Risks: How to Know When Numbers Deceive You*. Simon & Schuster.

National Weather Service (NWS). (n.d.). *Understanding Forecast Probability*.

U.S. Securities and Exchange Commission (SEC). (2021). *Investor Bulletin: Thinking About Investing in the Latest Hot Stock?*

Chan, E., & Wong, H. Y. (2021). *Cryptoassets: The Guide to Bitcoin, Blockchain, and Cryptocurrency for Investment Professionals*. CFA Institute Research Foundation.

Hull, J. C. (2015). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9th ed.). Pearson Education.

Haigh, J. (2003). *Taking Chances: Winning with Probability*. Oxford University Press.

American Statistical Association. (2010). *What Are the Odds? Chance in Everyday Life*.

Adams, M. (2015). *The Lottery and You: Understanding the Odds*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(5), 296–299.

Santoso, I., & Noormandiri, B. K. (2023). *Matematika untuk SMA/MA Kelas XII*. Jakarta: Erlangga.

Tahir, M. (2015). *Teori Peluang dan Statistik untuk Siswa dan Mahasiswa*. Jakarta: Erlangga.

Grinstead, C. M. & Snell, J. L. (1997). *Introduction to Probability*. 2nd ed. American Mathematical Society.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1, 3rd ed. New York: Wiley.

Sari, Y. S., & Putri, S. A. (2018). *Analisis Peluang Kejadian Majemuk dalam Pengambilan Sampel*. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 8(1), 15-27.

Mohammad, S., & Rahmat, S. (2013). *Probabilitas dan Statistik dalam Ilmu Pengetahuan Alam*. Bandung: Alfabeta.