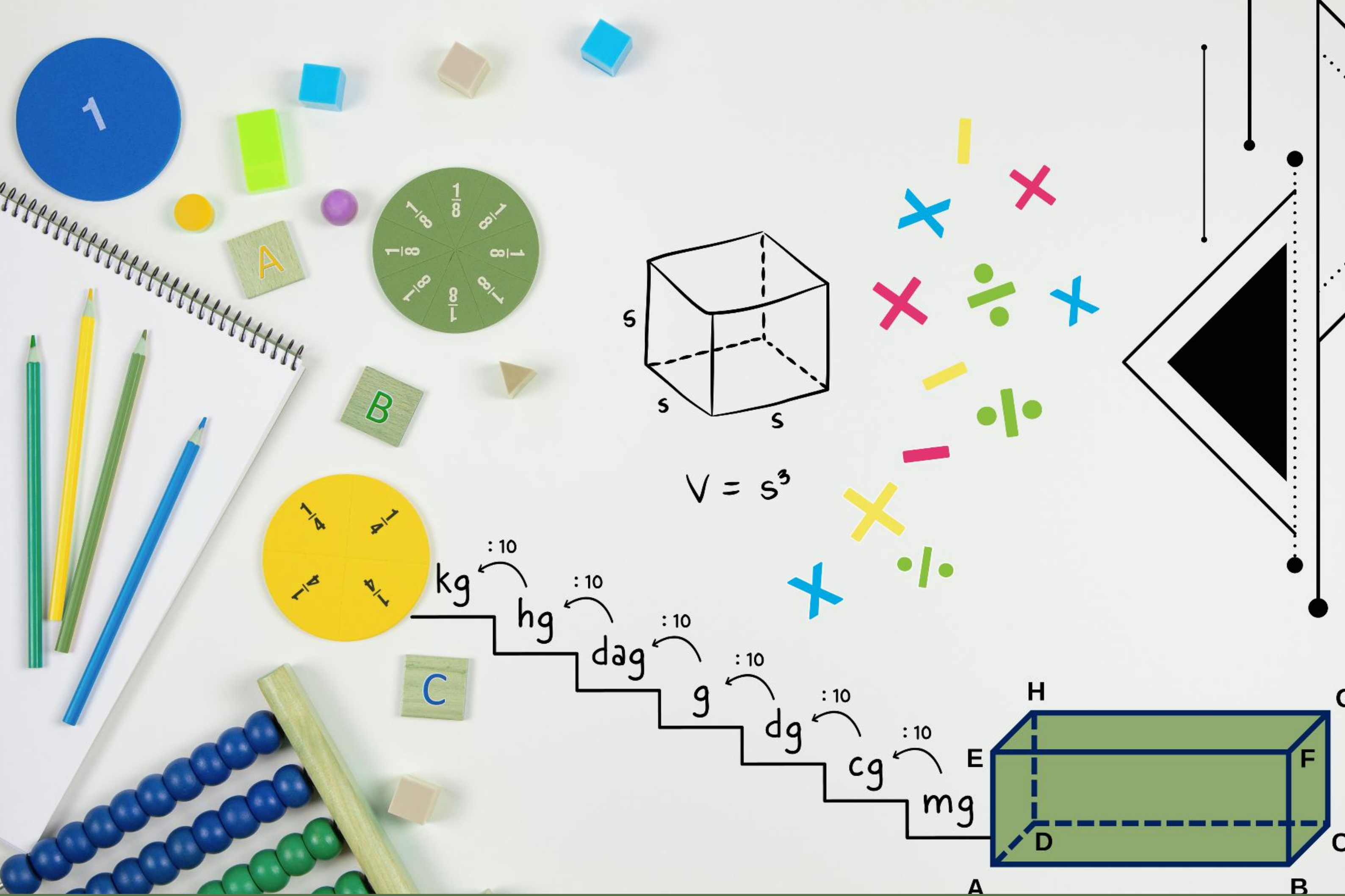


KELAS 11

MATEMATIKA

Menyelami Logika dan Pola Matematika:

Buku Pegangan Matematika untuk Siswa Kelas 11

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas terbitnya e-book Matematika ini yang merupakan bagian dari upaya menghadirkan pembelajaran yang lebih mudah diakses oleh seluruh pelajar Indonesia. Matematika adalah mata pelajaran yang mempelajari tentang pola pikir logis, keterampilan berhitung, serta kemampuan memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.

E-book ini disusun berdasarkan Capaian Pembelajaran Matematika Fase E (sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Nomor 008/H/KR/2022 Tentang Capaian Pembelajaran Pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah Pada Kurikulum Merdeka). Konten e-book ini dirancang agar peserta didik dapat memahami materi Matematika secara komprehensif, mengasah keterampilan berpikir kritis, serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain materi utama, e-book ini juga dilengkapi dengan latihan soal, pembahasan, serta tautan ke sumber belajar tambahan seperti video pembelajaran interaktif.

E-book ini merupakan bagian dari platform Fitri, sebuah platform pembelajaran digital yang menyediakan akses gratis ke berbagai materi belajar, termasuk e-book, latihan soal, dan video pembelajaran interaktif untuk seluruh anak Indonesia. Fitri hadir sebagai wujud kontribusi nyata dalam mendukung pemerataan akses pendidikan berkualitas di Indonesia. Dengan semangat gotong royong dan inklusi, Fitri berkomitmen untuk membantu seluruh siswa, di mana pun berada, agar dapat belajar secara mandiri, efektif, dan menyenangkan. Hal ini selaras dengan tujuan besar pendidikan Indonesia, yaitu mewujudkan generasi yang cerdas, berkarakter, dan siap menghadapi tantangan zaman.

Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung tersedianya e-book ini. Semoga kehadiran e-book Matematika ini dapat memberikan manfaat nyata dalam proses belajar peserta didik dan turut berkontribusi dalam meningkatkan literasi bangsa.

Jakarta, Juni 2025

Tim Fitri

Daftar Isi

BAB 1

FUNGSI INVERS DAN KOMPOSISI FUNGSI

Karakter Pelajar Pancasila

Kreatif, Benalar Kritis, Mandiri.

Kata Kunci: Fungsi, Fungsi Bijektif, Fungsi Injektif, Fungsi Surjektif, Invers, Komposisi Fungsi.

Tujuan Pembelajaran: Menaklukan Fungsi Invers dan Komposisi Fungsi

1. **Menguraikan Syarat dan Aturan Pembuatan Fungsi Invers**
   - ▷ Menguraikan persyaratan yang harus dipenuhi oleh sebuah fungsi agar dapat memiliki invers.
   - ▷ Menyampaikan aturan-aturan yang berlaku dalam pembuatan invers suatu fungsi.
2. **Mengidentifikasi Fungsi Invers**
   - ▷ Menyusun dan mencari invers dari fungsi yang diberikan.
   - ▷ Menerapkan rumus dan prosedur yang tepat untuk menentukan invers dari suatu fungsi.
3. **Mendeskripsikan Syarat dan Aturan Komposisi Fungsi**
   - ▷ Menguraikan ketentuan yang berlaku dalam komposisi dua fungsi.
   - ▷ Menjelaskan bagaimana menyusun komposisi fungsi yang sesuai dengan aturan yang ada.

4. **Mengidentifikasi Komposisi Fungsi**
   - ▷ Menyusun komposisi dari dua fungsi dengan benar.
   - ▷ Menerapkan aturan komposisi fungsi dalam perhitungan dan aplikasi matematika.
5. **Menyelesaikan Masalah Operasi Invers dan Komposisi Fungsi**
   - ▷ Menggunakan konsep fungsi invers dan komposisi untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.
   - ▷ Mengaplikasikan aturan invers dan komposisi dalam situasi kehidupan nyata atau soal-soal praktis.

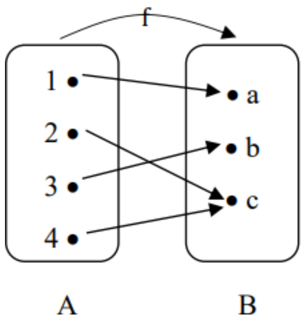
1. Sifat – sifat Fungsi

Fungsi Onto

Suatu fungsi f: A → B dikatakan fungsi onto atau surjektif jika setiap anggota B mempunyai pasangan anggota A. Dalam hal ini, range (daerah hasil) saling berimpit dengan dengan kodomain (daerah kawan).

Bentuk umum fungsi onto:

f: A → B surjektif apabila untuk setiap b ∈ B dan a ∈ A, maka f(a) = b.



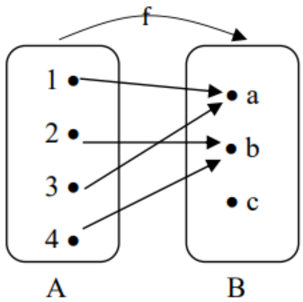
A : {1, 2, 3, 4} , B : {a, b, c}

Fungsi f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, c), (3, b), (4, c)}.

Tampak bahwa daerah hasil fungsi f : Rf : {a, b, c} dan Rf ⊂ B, maka fungsi f adalah fungsi into atau fungsi ke dalam.

Fungsi Satu – satu

Suatu fungsi f: A → B dikatakan fungsi satu-satu atau injektif jika setiap anggota A mempunyai pasangan tepat satu saja anggota B, dengan kata lain tiap elemen B (kodomain) hanya boleh berelasi satu kali. Tidak perlu semua anggota B mempunyai pasangan anggota di A.



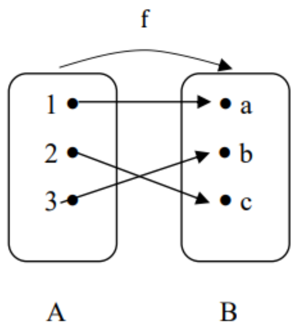
A : {1,2,3} , B : {a,b,c}

f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, c), (3, b)}.

Tampak bahwa tiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda di B Fungsi f adalah fungsi injektif atau satu-satu.

Fungsi Korespondensi Satu – satu

Suatu fungsi f: A → B dikatakan fungsi korespondensi satu-satu atau bijektif jika fungsi tersebut adalah fungsi surjektif dan sekaligus fungsi injektif.



A : {1, 2, 3} , B : {a, b, c}

Fungsi f : A → B, dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, c), (3, b)}. Tampak bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif. fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

Setiap Keberangkatan (Domain) Memiliki Tujuan (Kodomain) – Freepik.com

Contoh Soal

Dari fungsi $f: R \rightarrow R$ di bawah ini, tentukan fungsi mana yang termasuk fungsi onto, injektif, atau bijektif.

a. $f(x) = 4x$

b. $f(x) = x^2$

c. $f(x) = x + 5$

d. $f(x) = 4^x$

e. $f(x) = x^3 - x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 4x$

Fungsi ini bersifat linear dengan gradien positif. Untuk setiap $x_1 \neq x_2$, berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$, sehingga fungsi ini injektif.

$f(x)$ ini dapat menghasilkan semua bilangan real saat x bergerak di seluruh R, sehingga fungsi ini onto.

Karena fungsi termasuk injektif dan onto, maka fungsi ini bijektif.

b. $f(x) = x^2$

Fungsi kuadrat tidak injektif karena, misalnya, $f(2) = f(-2) = 4$, sehingga $x_1 \neq x_2$ tetapi $f(x_1) = f(x_2)$, sehingga fungsi ini tidak injektif.

Fungsi ini hanya menghasilkan nilai $f(x) \geq 0$ (non-negatif). Sementara R mencakup bilangan negatif, sehingga fungsi ini tidak onto.

Karena fungsi ini tidak injektif dan tidak onto, maka fungsi ini tidak bijektif.

c. $f(x) = x + 5$

Fungsi linear dengan gradien positif selalu injektif.

Untuk setiap $y \in R$, selalu ada $x = y - 5$ sehingga $f(x) = y$, maka, fungsi ini onto.

Karena injektif dan onto, maka fungsi ini bijektif.

d. $f(x) = 4^x$

Fungsi eksponen 4^x adalah fungsi yang monoton naik, sehingga jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$, maka fungsi ini injektif.

Fungsi eksponen 4^x hanya menghasilkan bilangan positif, yaitu $f(x) \in (0,\infty)$. Kodomain fungsi adalah R yang mencakup bilangan negatif, fungsi ini tidak onto.

Karena hanya injektif tetapi tidak onto, maka fungsi ini tidak bijektif.

e. $f(x) = x^3 - x$

Fungsi ini tidak injektif, karena terdapat lebih dari satu nilai x yang menghasilkan nilai fungsi sama. Contohnya: $f(1) = f(0)$.

Karena suku pangkat tertinggi adalah ganjil (pangkat 3) dan grafik f(x) tidak terputus, maka fungsi ini mencakup semua bilangan real sebagai hasilnya. Dengan demikian, fungsi ini onto.

Karena hanya onto dan tidak injektif, maka fungsi ini tidak bijektif.

Pojok Matematika

Sistem Parkir Mobil Vertikal

- ▷ Sistem parkir mobil vertikal merupakan salah satu inovasi teknologi yang menerapkan konsep fungsi dalam pengaturannya. Dalam sistem ini, posisi setiap mobil dalam struktur bertingkat ditentukan berdasarkan input tertentu, seperti nomor urut kedatangan atau kategori kendaraan. Fungsi digunakan untuk memetakan input tersebut ke dalam posisi parkir yang sesuai, sehingga setiap kendaraan dapat ditempatkan secara sistematis dan efisien tanpa terjadi tumpang tindih atau kekeliruan penempatan.
- ▷ Pada operasionalnya, sistem ini seringkali menggunakan fungsi linear atau fungsi berbasis algoritma tertentu yang mempertimbangkan kapasitas ruang, tinggi kendaraan, serta waktu kedatangan. Misalnya, sebuah fungsi sederhana dapat digunakan untuk menentukan lantai parkir berdasarkan nomor urut kendaraan, sedangkan fungsi lain dapat mengatur urutan pengambilan mobil agar kendaraan yang lebih dahulu masuk tidak terhalang oleh kendaraan yang datang belakangan. Dengan menggunakan fungsi, seluruh proses parkir dan pengambilan kendaraan dapat diotomatisasi dan diprediksi dengan lebih akurat.
- ▷ Penerapan fungsi dalam sistem parkir mobil vertikal memperlihatkan bagaimana konsep matematis dapat diintegrasikan dalam solusi teknik modern. Selain meningkatkan efisiensi penggunaan ruang di kawasan urban yang padat, penerapan ini juga mempercepat proses parkir dan pengambilan kendaraan, mengurangi antrian, serta meminimalkan kesalahan manusia. Dengan demikian, fungsi menjadi komponen penting dalam desain dan pengoperasian teknologi parkir pintar di berbagai kota besar.

2. Operasi Aljabar dalam Fungsi

Vending Machine Menggunakan Konsep Fungsi – Freepik.com

Operasi aljabar dalam fungsi merujuk pada operasi matematika yang dilakukan terhadap fungsi-fungsi yang ada, mencakup penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, perkalian, dan pembagian

Apabila f dan g merupakan dua fungsi terdefinisi pada himpunan D, di mana D_f dan D_g merupakan domain dari f dan g, maka:

1) Jumlah f dan g, ditulis f + g, didefinisikan dengan:

$$(f + g) = f(x) + g(x), \text{ dan } x \in D_f \cap D_g$$

2) Selisih f dan g, ditulis f – g, didefinisikan dengan:

$$(f - g) = f(x) - g(x), \text{ dan } x \in D_f \cap D_g$$

3) Hasil kali f dengan skalar k, ditulis kf, definisikan dengan:

$$(kf)(x) = kf(x), \text{ dan } x \in D_f$$

4) Hasil kali fungsi f dan g, ditulis f · g, didefinisikan dengan:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \text{ dan } x \in D_f \cap D_g$$

5) Hasil bagi f dengan g, ditulis $\frac{f}{g}$, didefinisikan dengan:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, \text{ dan } x \in D_f \cap D_g$$

Contoh Soal

1. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$ an $g(x) = -2$, untuk $x \in R$.
   a. Tentukan $f + g$ dan $f - g$.
   b. Gambarlah grafik $f + g$ dan $f - g$ pada sistem koordinat yang sama

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 4$

   Misalkan: $f + g = h$, maka

   $h(x) = (f + g)(x)$

   $= x^2 + 1 + (-2)$

   $= x^2 - 1$

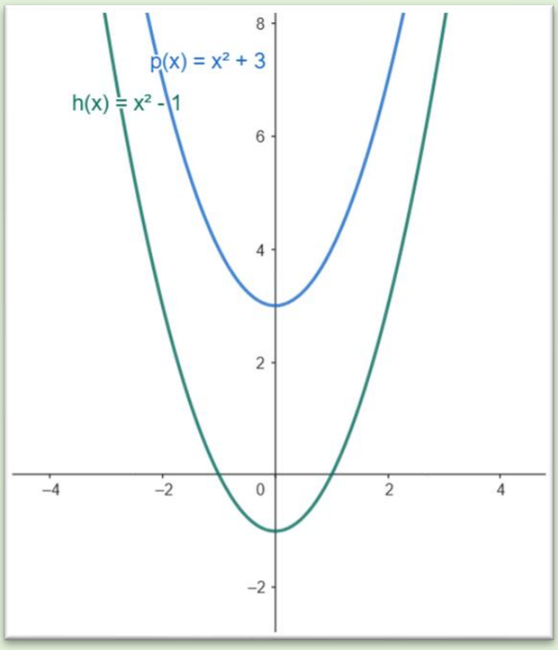
   Misalkan: $f - g = p$

   $p(x) = (f - g)(x)$

   $= x^2 + 1 - (-2)$

   $= x^2 + 3$

   b.



2. Diketahui $f(x) = x^2$ dan $g(x) = -x + 5$. Tentukan:

   a. f + g dan f – g
   b. arah pergeseran kurva

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = x^2$ dan $g(x) = -x + 5$

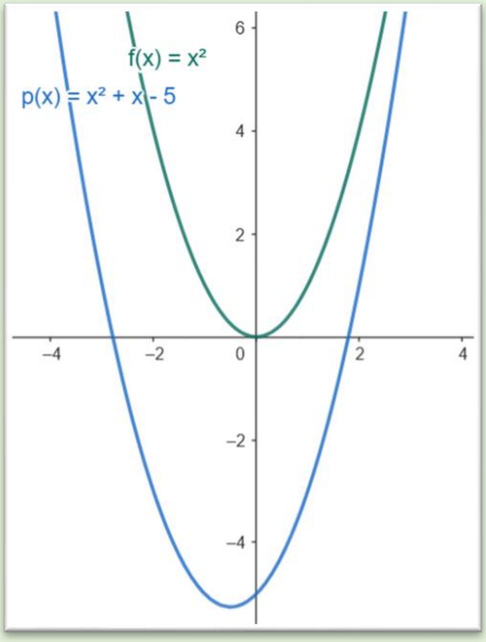
      Misalkan: $f - g = p$

      $p(x) = f(x) - g(x)$

      $= x^2 - (-x + 5)$

      $= x^2 + x - 5$

   b. Grafik kurva $p(x) = x^2 + x - 5$ diperoleh dengan menggeser kurva $f(x) = x^2$ ke kiri 1 satuan dan bawah sejauh 5 satuan. Lihat gambar berikut.



3. Tentukan hasil operasi aljabar tiap fungsi berikut.

   a. Diketahui $f(x) = x^2 + x - 6$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukan $\frac{f(x)}{g(x)}$.

   b. Diketahui $f(x) = \frac{x}{x+2}$ dan $g(x) = \frac{x^2-4}{x}$. Tentukan bentuk fungsi $f \cdot g$.

   Penyelesaian:

   a. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

      $= \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

      $= x + 3; x \neq 2$

   b. $f(x)\ g(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)\left(\frac{x^2-4}{x}\right)$

      $= \left(\frac{x}{x+2}\right)\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x}\right)$

      $= x - 2; x \neq -2$ dan $x \neq 0$

Pojok Matematika

Kecepatan Seseorang Berjalan

- ▷ Kecepatan dapat dianggap sebagai fungsi dari jarak yang ditempuh terhadap waktu yang dibutuhkan. Dengan kata lain, jika diketahui jarak tertentu dan waktu yang diperlukan untuk menempuhnya, maka kecepatan dapat dihitung menggunakan relasi matematis sederhana. Fungsi ini memetakan waktu atau jarak sebagai input menjadi nilai kecepatan sebagai output, sesuai dengan rumus dasar $v = \frac{d}{t} =$, di mana v adalah kecepatan, d adalah jarak, dan t adalah waktu.
- ▷ Dalam konteks yang lebih dinamis, kecepatan orang berjalan dapat bervariasi tergantung pada berbagai faktor seperti kondisi medan, tingkat kelelahan, atau beban yang dibawa. Oleh karena itu, fungsi yang menggambarkan hubungan ini tidak selalu bersifat linear, melainkan dapat berbentuk fungsi non-linear. Misalnya, pada awal perjalanan, kecepatan mungkin meningkat secara bertahap sebelum stabil, lalu menurun seiring bertambahnya kelelahan. Konsep fungsi digunakan untuk memodelkan perubahan tersebut sehingga analisis terhadap pola berjalan dapat dilakukan secara lebih akurat.
- ▷ Penerapan fungsi dalam memahami kecepatan berjalan menjadi penting dalam berbagai bidang, seperti perencanaan fasilitas umum, analisis perilaku pejalan kaki, dan desain sistem transportasi perkotaan. Melalui pemodelan matematis ini, kebutuhan ruang pejalan kaki, waktu tempuh rata-rata, serta strategi pengaturan arus lalu lintas pejalan kaki dapat dioptimalkan. Dengan demikian, konsep fungsi memberikan dasar analitis yang kuat dalam mendukung pengambilan keputusan di bidang perencanaan dan rekayasa transportasi.

3. Fungsi Invers

Fungsi Invers dalam Konversi Satuan Suhu – Freepik.com

Fungsi invers merupakan fungsi yang "membalikkan" operasi dari suatu fungsi. Apabila terdapat fungsi $f: A \rightarrow B$, maka fungsi invers dari f, yang ditulis sebagai f^{-1} akan memetakan setiap elemen di himpunan B kembali ke elemen di himpunan A.

Fungsi dengan Invers

Suatu fungsi atau pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu relasi yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Relasi ini ditulis $f: A \rightarrow B$ (baca: f memetakan A ke B).

Perhatikan contoh berikut.

Fungsi $f: A \rightarrow B$ dengan $f = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in A \text{ dan } y \in B\}$ didefinisikan dengan $y = f(x) = 2x$. Jika daerah asal (domain) $D_f = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$, maka daerah hasilnya (Range) adalah:

$f(-2) = 2 \times (-2) = -4$

$f(-1) = 2 \times (-1) = -2$

$f(0) = 2 \times 0 = 0$

$f(1) = 2 \times 1 = 2$

$f(2) = 2 \times 2 = 4$

sehingga Range $R_f = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. Pasangan berurut dari fungsi f adalah $f: \{\ldots, (-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), \ldots\}$.

Invers dari fungsi f adalah $f^{-1}: B \rightarrow A$. Dari pasangan berurut fungsi f dapat ditentukan daerah asal invers fungsi f, yaitu $D_{f^{-1}} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, sedangkan daerah hasil $R_{f^{-1}} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Pasangan berurut invers fungsi f adalah $f^{-1}: \{\ldots, (-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2), \ldots\}$

Pasangan berurut di atas menjelaskan bahwa setiap dua unsur yang berbeda di dalam domain f dikawankan dengan dua unsur yang berbeda di dalam daerah kawan (kodomain) f. Sebagai contoh, $x_1 = -2$ dan $x_2 = 2$ dikawankan berturut turut dengan $y_1 = -4$ dan $y_2 = 4$.

Invers dari fungsi ini akan mengaitkan kedua unsur yang berbeda tersebut dengan dua unsur asalnya yang juga berbeda, yaitu −4 dengan −2 dan 4 dengan 2. Artinya, relasi pada invers fungsi f merupakan relasi satu-satu, di mana setiap elemen di domainnya dipasangkan dengan tepat satu elemen di kodomain. Invers dari fungsi f memenuhi syarat sebagai sebuah fungsi, maka f^{-1}disebut fungsi invers.

Pengertian Fungsi Invers

Suatu fungsi f: A → B akan memiliki invers f^{-1}: B → A, jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bersifat bijektif atau berkorespondensi satu-satu.

Secara umum, dapat didefinisikan:

Apabila fungsi f: $D_f \rightarrow R_f$ merupakan fungsi bijektif, maka invers dari fungsi f adalah fungsi f^{-1} yang dinyatakan sebagai berikut.

$$f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$$

Menentukan Rumus Fungsi Invers

Jika fungsi f: R → R dan f^{-1} = R → R, maka nilai fungsi f dapat dinyatakan dengan f(x) = y. Dengan demikian, f^{-1} (x) = ….

Contoh Soal

1. Fungsi f: R → R dinyatakan dengan f(x) = 4x + 2. Tentukan rumus fungsi inversnya.

   Penyelesaian:

   Misalkan f(x) = y, maka

   $4x + 2 = y$

   $4x = y - 2$

   $x = \frac{1}{4}(y - 2)$

   $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(y - 2)$ … (1)

   Persamaan (1) dapat ditulis:

   $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 2)$

   $= \frac{x}{4} - \frac{2}{4}$

   $= \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

2. Tentukan rumus fungsi invers f jika diketahui $f(x) = \frac{6 - x}{2x - 4}$, dengan $2x - 4 \neq 0$. Selanjutnya, tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi f tersebut.

   Penyelesaian:

   Misalkan y merupaka nilai fungsi x oleh f, maka:

   $f(x) = y$

   $\frac{6 - x}{2x - 4} = y$

   $6 - x = 2xy - 4y$

   $6 + 4y = 2xy + x$

   $6 + 4y = x(2y + 1)$

   $x = \frac{6 + 4y}{2y + 1}$; dengan $2y + 1 \neq 0$

   Jadi, rumus fungsi invers f adalag $f^{-1}(x) = \frac{6 + 4y}{2y + 1}$; dengan $2y + 1 \neq 0$.

Daerah asal fungsi f: $D_f = \{x \mid x \neq 2, x \in R\}$

Daerah hasil fungsi f: $R_f = \{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, x \in R\}$

Daerah asal fungsi f^{-1}: $D_{f^{-1}} = \{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, x \in R\}$

Daerah hasil fungsi f^{-1}: $D_{f^{-1}} = \{x \mid x \neq 2, x \in R\}$

3. Diketahui $f(x) = 5x - 6$. Tentukan nilai $f(8)$ dan $f^{-1}(24)$.

Penyelesaian:

- $f(8) = 5(8) - 6$

  $f(8) = 40 - 6 = 34$

- Misalkan $f(x) = y$

  $5x - 6 = y$

  $5x = y + 6$

  $x = \frac{1}{5}(y + 6)$

  $\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(y + 6)$

  sehingga:

  $f^{-1}(24) = \frac{1}{5}(24 + 6) = 6$

  Alternatif penyelesaian:

  Misalkan $f^{-1}(24) = t$, maka

  $f(t) = 24$

  $5t - 6 = 24$

  $5t = 30$

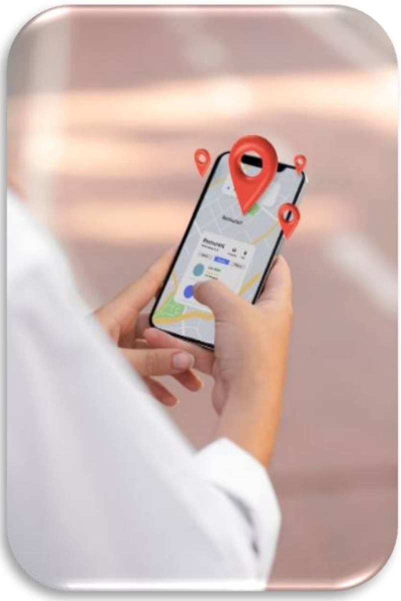
  $t = 6$

  $f^{-1}(24) = 6$

Pojok Matematika

Bagaimana Cara Kerja *Google Maps*?

- Aplikasi *Google Maps* merupakan contoh nyata penerapan konsep komposisi fungsi dalam kehidupan sehari-hari. Proses pencarian rute dari suatu lokasi ke lokasi lain melibatkan lebih dari satu langkah pemrosesan data. Sebagai ilustrasi, terdapat fungsi yang mengonversi alamat atau nama tempat menjadi koordinat geografis (fungsi pertama), kemudian dilanjutkan dengan fungsi lain yang menghitung estimasi waktu tempuh berdasarkan koordinat tersebut serta data lalu lintas terkini (fungsi kedua). Komposisi kedua fungsi ini dapat direpresentasikan secara matematis sebagai $f(g(x))$, di mana $g(x)$ merupakan proses transformasi alamat ke koordinat, dan $f(x)$ merupakan proses penghitungan waktu tempuh.
- Konsep komposisi fungsi melibatkan penggabungan dua atau lebih fungsi secara berurutan, sehingga hasil dari fungsi pertama menjadi *input* bagi fungsi berikutnya. Dalam konteks pemetaan digital seperti *Google Maps*, tahapan pemrosesan data tersebut tidak dilakukan secara terpisah, melainkan terintegrasi dalam sistem yang memberikan hasil akhir secara instan kepada pengguna. Dengan demikian, komposisi fungsi menjadi dasar logika dari sistem navigasi modern yang bergantung pada pemrosesan data berlapis.



- Pemahaman terhadap komposisi fungsi tidak hanya relevan dalam pembelajaran matematika, tetapi juga penting untuk memahami cara kerja berbagai sistem teknologi digital. Berbagai aplikasi dalam bidang transportasi, logistik, dan informasi geografis mengandalkan proses pemrosesan data bertahap seperti yang dimodelkan oleh komposisi fungsi. Oleh karena itu, konsep ini memiliki nilai praktis yang tinggi dan menjadi bagian integral dalam pengembangan sistem berbasis data.

4. Fungsi Komposisi

Ilustrasi Fungsi Komposisi dalam Rantai Produksi Barang – Freepik.com

Komposisi Dua Fungsi

Dua buah fungsi, yaitu f dan g, dapat digabungkan melalui sebuah "aturan tertentu" yang disebut sebagai "komposisi fungsi".

Fungsi $f \circ g$: apabila fungsi f dan g memenuhi $R_g \cap D_f \neq \varnothing$, maka akan terbentuk suatu fungsi h dari himpunan bagian D_g ke himpunan bagian R_f, yang dinyatakan oleh $h = f \circ g$ dengan aturan:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

dengan domain $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

Fungsi $g \circ f$: apabila fungsi f dan g memenuhi $R_f \cap D_g \neq \varnothing$, maka akan terbentuk suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g, yang dinyatakan oleh $h = g \circ f$ dengan aturan:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

dengan domain $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid g(x) \in D_g\}$.

Komposisi fungsi $f \circ g$ {"komposisi f melanjutkan g" atau "g dilanjutkan f") didefinisikan sebagai $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Contoh Soal

1. Diketahui $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 5x - 8$. Tentukan:

   a. $f \circ g$

   b. $g \circ f$

   Penyelesaian:

   a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

   $= f(5x - 8)$

   $= (5x - 8) + 2$

   $= 5x - 6$

   b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

   $= g(x + 2)$

   $= 5(x+ 2) - 8$

   $= 5x + 10 - 8$

   $= 5x + 2$

2. Diketahui f dan g dinyatakan dengan rumus $f(x) = 2x - 5$ dan $g(x) = x^2 + 4x + 1$. Tentukan rumus untuk:

   a. $(f \circ g)(x)$

   b. $(g \circ f)(x)$

   Penyelesaian:

   a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

   $= 2(x^2 + 4x + 1) - 5$

   $= 2x^2 + 8x + 2 - 5$

   $= 2x^2 + 8x - 3$

   b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

   $= (2x - 5)^2 + 4(2x - 5) + 1$

   $= 4x^2 - 20x + 25 + 8x - 20 + 1$

   $= 4x^2 - 12x + 6$

3. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 3$. Tentukan:

   a. $g(x)$ jika $(f \circ g)(x) = 7 - 4x$

   b. $g(x)$ jika $(g \circ f)(x) = 5 - 2x$

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = 2x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = 7 - 4x$

   $f(g(x)) = 7 - 4x$

   $2g(x) + 3 = 7 - 4x$

   $2g(x) = 7 - 4x - 3$

   $2g(x) = 4 - 4x$

   $\therefore g(x) = 2 - 2x$

b. $f(x) = 2x + 3$ dan $(g \circ f)(x) = 5 - 2x$

$$g(f(x)) = 5 - 2x$$

$$g(2x + 3) = 5 - 2x \qquad \ldots(*)$$

Misalkan $2x + 3 = y$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

Substitusikan $x = \frac{y-3}{2}$ ke (*), diperoleh:

$$g(y) = 5 - 2\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

$$= 5 - y + 3$$

$$= 8 - y$$

$\therefore g(x) = 8 - x$

Invers Fungsi Komposisi

Mengosongkan Koper Merupakan Invers Fungsi Komposisi – Freepik.com

Fungsi-fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dapat disusun menjadi fungsi komposisi $k(x) = (f \circ g)(x)$ atau $m(x) = (g \circ f)(x)$. Invers dari $k(x)$ dan $m(x)$ berturut-turut adalah $k^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ dan $m^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$. Bentuk-bentuk $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$ dinamakan invers dari fungsi komposisi.

Misalkan fungsi f dan fungsi g merupakan fungsi bijektif sehingga memiliki fungsi invers f^{-1} dan g^{-1}.

1) Fungsi komposisi $(f \circ g)$ memetakan x ke z, pemetaan pertama ditentukan oleh g dan pemetaan kedua ditentukan oleh f. Pada awalnya x oleh fungsi g dipetakan ke y, kemudian y oleh fungsi f dipetakan ke z.

2) Invers dari fungsi komposisi $(f \circ g)$, yaitu $(f \circ g)^{-1}$ memetakan z ke x, pemetaan pertama ditentukan oleh f^{-1} dan pemetaan kedua ditentukan oleh g^{-1} dipetakan kembali ke x. Oleh karena itu, pemetaan z kembali ke x dapat dinyatakan dengan fungsi komposisi $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Jika f dan g masing-masing merupakan fungsi bijektif sehingga memiliki fungsi invers f^{-1} dan g^{-1}, maka invers dari fungsi komposisi ditentukan oleh aturan:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

Contoh Soal

Diketahui $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = 3x + 7$ dan $g(x) = x - 1$. Tentukan rumus fungsi:

a. $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$

c. $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

d. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ dan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Penyelesaian:

a. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(3x + 7) - 1$

$= 3x + 7 - 1$

$= 3x + 6$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= 3(x - 1) + 7$

$= 3x - 3 + 7$

$= 3x + 4$

b. $(g \circ f)(x) = y$

$3x + 6 = y$

$x = \frac{1}{3}(y - 6)$

$\therefore (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 6)$

$(f \circ g)(x) = y$

$3x + 4 = y$

$x = \frac{1}{3}(y - 4)$

$\therefore (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$

c. $f(x) = y$

$3x + 7 = y$

$x = \frac{1}{3}(y - 7)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 7)$

$g(x) = y$

$x - 1 = y$

$x = y + 1$

$\therefore g^{-1}(x) = x + 1$

d. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$

$= f^{-1}(x + 1)$

$= \frac{1}{3}(x + 1) - 7$

$= \frac{1}{3}(x - 6)$

$$
\begin{aligned}
(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1})(x) \\
&= g^{-1}(\tfrac{1}{3}(x - 7)) \\
&= (\tfrac{1}{3}(x - 7)) + 1 \\
&= \frac{(x - 7) + 3}{3} \\
&= \tfrac{1}{3}(x - 7 + 3) \\
&= \tfrac{1}{3}(x - 4)
\end{aligned}
$$

Pojok Matematika

Sistem Nilai Tukar Mata Uang

- Proses konversi mata uang sering kali melibatkan lebih dari satu langkah, khususnya apabila tidak tersedia nilai tukar langsung antara dua mata uang tertentu. Situasi ini dapat dijelaskan secara matematis melalui konsep komposisi fungsi. Sebagai contoh, untuk mengonversi mata uang dari Rupiah (IDR) ke Euro (EUR), tetapi hanya tersedia nilai tukar dari Rupiah ke Dolar Amerika Serikat (USD), dan dari USD ke Euro, maka proses konversi dilakukan melalui dua tahap. Tahap pertama mengonversi Rupiah ke Dolar (fungsi pertama), dan tahap kedua mengonversi Dolar ke Euro (fungsi kedua).
- Dalam notasi matematika, misalkan fungsi (f(x) merepresentasikan konversi dari Rupiah ke Dolar, dan fungsi g(x) merepresentasikan konversi dari Dolar ke Euro. Maka, konversi dari Rupiah ke Euro dinyatakan dengan komposisi fungsi g(f(x)). Artinya, nilai dalam Rupiah diproses terlebih dahulu melalui fungsi f, kemudian hasilnya digunakan sebagai input untuk fungsi g. Dengan demikian, dua tahapan konversi tersebut dapat digabungkan menjadi satu proses matematis yang efisien.
- Penerapan komposisi fungsi dalam konversi mata uang sangat relevan dalam praktik keuangan internasional, termasuk dalam sistem perbankan, aplikasi dompet digital, dan platform perdagangan valuta asing. Dalam konteks tersebut, proses konversi sering kali melibatkan beberapa mata uang dan tahapan, tergantung pada ketersediaan data nilai tukar atau strategi ekonomi tertentu. Pemahaman terhadap konsep komposisi fungsi memungkinkan perancang sistem untuk menyusun algoritma yang akurat dan efisien dalam memproses konversi antar mata uang.

5. Masalah yang Melibatkan Operasi Invers dan Komposisi Fungsi

Contoh Soal

1. PT Tirta Persada merupakan perusahaan yang sangat peduli terhadap kesejahteraan karyawannya. Pada tahun 2024, perusahaan menetapkan kebijakan baru terkait pemberian tunjangan kepada karyawan. Setiap bulan, selain menerima gaji pokok, karyawan akan mendapatkan tiga jenis tunjangan, yaitu tunjangan keluarga, tunjangan kesehatan, dan tunjangan transportasi. Ketentuan mengenai tunjangan tersebut adalah sebagai berikut:

   - Tunjangan keluarga = $\frac{1}{3}$ dari gaji pokok ditambah bonus tambahan
   - Tunjangan kesehatan = $\frac{1}{2}$ dari jumlah tunjangan keluarga dan bonus tambahan
   - Tunjangan transportasi = $\frac{1}{4}$ dari tunjangan kesehatan

   Rincian bonus tambahan dapat dilihat pada tabel di bawah ini (dalam rupiah).

Gol	Masa Kerja dalam Tahun (M)						
	M ≤ 5	5<M≤ 10	10<M≤ 15	15<M≤20	20<M ≤25	25<M ≤30	M ≥ 30
I A	50.000	150.000	250.000	350.000	450.000	550.000	600.000
I B	150.000	250.000	350.000	450.000	550.000	650.000	750.000
II A	250.000	350.000	450.000	550.000	650.000	750.000	850.000
II B	350.000	450.000	550.000	650.000	750.000	850.000	950.000
III A	450.000	550.000	650.000	750.000	850.000	950.000	1.050.000
III B	550.000	650.000	750.000	850.000	950.000	1.050.000	1.150.000

   Arya merupakan seorang karyawan Golongan III A dan telah bekerja selama 23 tahun dengan gaji pokok Rp 9.000.000,00. Tentukan besaran masing-masing tunjangan keluarga, tunjangan kesehatan, dan tunjangan transportasi yang akan diperoleh Arya setiap bulan.

   Penyelesaian:

   Misalkan: tunjangan keluarga = k

   tunjangan kesehatan = s

   tunjangan transportasi = t

   gaji pokok = g

   bonus tambahan = b

   sehingga:

   $k = \frac{1}{3}g + b$

   $s = \frac{1}{2}(k + b)$

   $t = \frac{1}{4}s$

   Gaji pokok Arya sebesar Rp9.000.000,00.

   Dengan menduduki golongan III A dan masa kerja 23 tahun, maka bonus tambahan yang diterima Arya sebesar Rp850.000,00.

   $k = \frac{1}{3}9.000.000 + 850.000$

$= 3.000.000 + 850.000$

$= 3.850.000$

Tunjangan keluarga yang diterima Arya adalah sebesar Rp3.850.000,00.

$s = \frac{1}{2}(3.850.000 + 850.000)$

$= \frac{1}{2} \times 4.700.000$

$= 2.350.000$

Tunjangan kesehatan yang diterima Arya adalah sebesar Rp2.350.000,00.

$t = \frac{1}{4} \times 2.350.000$

$= 587.500$

Tunjangan transportasi yang diterima Arya adalah sebesar Rp587.500,00.

2. Konversi satuan suhu dalam derajat Celcius (°C) ke satuan suhu dalam derajat Fahrenheit (°F) ditentukan dengan rumus $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Termometer – Freepik.com

a. Tentukan rumus untuk mengubah satuan derajat Fahrenheit (°F) ke satuan suhu dalam derajat Celcius (°C).

b. Seorang anak memiliki suhu badan 99,5° F, tentukan suhu badan anak tersebut jika diukur menggunakan satuan derajat Celcius.

Penyelesaian:

a. Mengubah satuan derajat Fahrenheit (°F) ke satuan suhu dalam derajat Celcius (°C), artinya mencari invers dari fungsi $F = \frac{9}{5}C + 32$.

$F = \frac{9}{5}C + 32$

$\leftrightarrow \frac{9}{5}C + 32 = F$

$\leftrightarrow \quad \frac{9}{5}C = F - 32$

$\leftrightarrow \quad C = \frac{5}{9}(F - 32)$

b. Diketahui $F = 99,5$

$C = \frac{5}{9}(99,5 - 32)$

$= \frac{5}{9}(67,5)$

$= 37,5$

Jadi, suhu badan anak tersebut adalah 37,5 °C.

3. Pak Bayu berbelanja di pusat komputer. Ia akan membeli beberapa perangkat komputer. Akan tetapi, mobilnya Akan tetapi, mobilnya tidak dapat memuat seluruh perangkat komputer yang akan dibeli. Pak Bayu memilih toko komputer yang menyediakan pelayanan pengiriman barang. Ia harus membayar harga perangkat komputer tersebut, pajak pembelian, dan biaya pengiriman. Pajak adalah sebesar 8% dan biaya pengiriman sebesar Rp 150.000,00. Misalkan fungsi h(x) untuk total biaya setelah pajak dari jumlah pembelian x unit dan f(x) untuk total biaya beserta biaya pengiriman pada jumlah pembelian x unit.

Toko Komputer – Pinterest.com

a. Tentukan $(f \circ h)(x)$ dan $(h \circ f)(x)$. Manakah yang memberikan biaya total lebih rendah?

b. Misalkan biaya pengiriman tidak dikenakan pajak. Manakah dari fungsi $(f \circ h)(x)$ dan $(h \circ f)(x)$ yang digunakan?

Penyelesaian:

a. Bentuk fungsi yang digunakan:

- Pajak yang diterapkan sebesar 8%, maka harga naik jadi 1,08x → $h(x) = 1{,}08x$
- Biaya pengiriman flat Rp150.000,00 → $f(x) = x + 150.000$

$(f \circ h)(x) = f(h(x))$

$= f(1{,}08\,x)$

$= 1{,}08x + 150.000$

$(h \circ f)(x) = h(f(x))$

$= h(x + 150.000)$

$= 1{,}08(x + 150.000)$

$= 1{,}08x + 1{,}08 \times 150.000$

$= 1{,}08x + 162.000$

Terlihat bahwa h(f(x) lebih besar daripada f(h(x) karena biaya pengiriman terkena pajak. Jadi, $(f \circ h)(x)$ memberikan biaya total lebih rendah.

b. Apabila biaya pengiriman tidak dikenakan pajak, artinya barang saja yang dikenai pajak sebesar 8%. Setelah itu baru ditambahkan biaya pengiriman Rp150.000,00 tanpa kena pajak, sehingga:

- Menghitung pajak pembelian → h(x)
- Menambahkan biaya pengiriman → f(x)

Jadi, fungsi yang digunakan adalah $(f \circ h)(x)$.

Rangkuman

▷ Operasi fungsi

Apabila f dan g merupakan dua fungsi terdefinisi pada himpunan D, di mana D_f dan D_g merupakan domain dari f dan g, maka:

- Jumlah f dan g, ditulis f + g, didefinisikan dengan:

$(f + g) = f(x) + g(x)$, dan $x \in D_f \cap D_g$

- Selisih f dan g, ditulis f – g, didefinisikan dengan:

$(f - g) = f(x) - g(x)$, dan $x \in D_f \cap D_g$

- Hasil kali f dengan skalar k, ditulis kf, definisikan dengan:

$(kf)(x) = kf(x)$, dan $x \in D_f$

- Hasil kali fungsi f dan g, ditulis f · g, didefinisikan dengan:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan $x \in D_f \cap D_g$

- Hasil bagi f dengan g, ditulis $\frac{f}{g}$, didefinisikan dengan:

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, dan $x \in D_f \cap D_g$

▷ Invers fungsi

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ akan memiliki invers $f^{-1}: B \rightarrow A$, jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bersifat bijektif atau berkorespondensi satu-satu.

Secara umum, dapat didefinisikan:

Apabila fungsi $f: D_f \rightarrow R_f$ merupakan fungsi bijektif, maka invers dari fungsi f adalah fungsi f^{-1} yang dinyatakan sebagai berikut.

$$f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$$

▷ Komposisi fungsi

Dua buah fungsi, yaitu f dan g, dapat digabungkan melalui sebuah "aturan tertentu" yang disebut sebagai "komposisi fungsi".

Fungsi $f \circ g$: apabila fungsi f dan g memenuhi $R_g \cap D_f \neq \varnothing$, maka akan terbentuk suatu fungsi h dari himpunan bagian D_g ke himpunan bagian R_f, yang dinyatakan oleh $h = f \circ g$ dengan aturan:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

dengan domain $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

▷ Invers dari komposisi fungsi

Jika f dan g masing-masing merupakan fungsi bijektif sehingga memiliki fungsi invers f^{-1} dan g^{-1}, maka invers dari fungsi komposisi ditentukan oleh aturan:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

Latihan Soal

1. Invers dari $f(x) = \frac{2-3x}{x+5}$; $x \neq -5$ adalah …

   a. $f^{-1}(x) = \frac{5x-2}{x+3}$; $x \neq -3$
   b. $f^{-1}(x) = \frac{5x-2}{x-3}$; $x \neq 3$
   c. $f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{x+3}$; $x \neq -3$
   d. $f^{-1}(x) = \frac{2-5x}{x+3}$; $x \neq -3$
   e. $f^{-1}(x) = \frac{2-5x}{x-3}$; $x \neq -3$

2. Daerah hasil fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 6$ untuk daerah asal $\{x \mid -4 \leq x \leq 3, x \in R\}$ dan $y = f(x)$ adalah …

   a. $\{y \mid -9 \leq y \leq 7, y \in R\}$
   b. $\{y \mid -9 \leq y \leq 0, y \in R\}$
   c. $\{y \mid -7 \leq y \leq 9, y \in R\}$
   d. $\{y \mid 0 \leq y \leq 9, y \in R\}$
   e. $\{y \mid 7 \leq y \leq 9, y \in R\}$

3. Diketahui fungsi $f(x) = x + 10$, maka nilai $f^{-1}(2)$ adalah ….

   a. 10
   b. −8
   c. 12
   d. −12
   e. 8

4. Diketahui fungsi $f(x) = 7x + 1$ dan $g(x) = \frac{1}{2}x - 5$, maka $(f \circ g)(x)$ untuk $x = -4$ adalah …

   a. $8\frac{4}{7}$
   b. 18
   c. 22
   d. $11\frac{3}{7}$
   e. 50

5. Jika $f(x) = x - 3$ dan $g(x) = 3 - 2x$, maka fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$ adalah …

   a. $2x$
   b. $-2x$
   c. $\frac{1}{2}x - 3$
   d. $-\frac{1}{2}x$
   e. $\frac{1}{2}x$

6. Diketahui fungsi $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = 3x + 8$, maka fungsi $(f + g)(x)$ adalah …

   a. $2x + 12$
   b. $3x + 13$
   c. $4x + 13$
   d. $13 - 4x$
   e. $2x + 8$

7. Diketahui $g(x) = 3x + 4$ dan $f(x) = 2x$, nilai dari $(f \circ g)(1)$ adalah …

   a. 11
   b. 12
   c. 13
   d. 14
   e. 15

8. Jika $f(x) = 2x - 7$ dan $g(x) = 3x + 5$, nilai $(f \circ g)(3) = …$

   a. −15
   b. −8
   c. −11
   d. −21
   e. −5

9. Jika fungsi $f(x) = \frac{3x-6}{9-6x}$, nilai dari $f^{-1}(3)$ adalah …

a. $\frac{4}{3}$

b. $\frac{1}{9}$

c. $\frac{7}{5}$

d. $-\frac{5}{3}$

e. $-\frac{4}{9}$

10. Untuk membuat kain, dibutuhkan bahan baku berupa kapas. Kapas akan diubah menjadi benang dengan bantuan mesin A yang didefinisikan dengan $f(x) = 3x - 2$. Kemudian benang yang sudah jadi akan diproses menjadi kain dengan bantuan mesin B yang didefinisikan dengan $g(x) = x - 0{,}2$. Jika kapas yang tersedua adalah 1 ton, maka kain yang akan dihasilkan adalah sebanyak …

    a. 0,2 ton

    b. 0,3 ton

    c. 0,4 ton

    d. 0,6 ton

    e. 0,8 ton

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 11 BAB 1

Referensi

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (11th ed.). Wiley.

Hall, G., & Knight, F. (2008). *Higher Algebra* (Reprint ed.). AITBS Publishers.

Noormandiri, B. K. (2023). *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

Purcell, E. J., & Varberg, D. (2007). *Calculus with Analytic Geometry* (9th ed.). Pearson Education. *(Referensi konsep fungsi, fungsi invers, dan komposisi fungsi secara umum.)*

Stewart, J. (2015). *Calculus: Early Transcendentals* (7th ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.

Sutrisno, A. (2005). *Fungsi dan Grafiknya*. Jakarta: Erlangga.

Widodo, S. A. (2018). *Pembelajaran Matematika: Teori dan Praktik* (Edisi Revisi). PT Remaja Rosdakarya.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2019). *University Physics with Modern Physics* (15th ed.). Pearson.

BAB 2
LINGKARAN

Karakter Pelajar Pancasila

Kreatif, Benalar Kritis, Mandiri.

Kata Kunci: Busur, Diameter, Garis Singgung, Juring, Jari-jari, Lingkaran, Sudut Pusat, Sudut Keliling, Tali Busur, Tembereng.

Tujuan Pembelajaran: Menyelidiki Lingkaran Melalui Aktivitas

1. **Mendeskripsikan Luas Juring dan Panjang Busur Lingkaran**
   - ▷ Menguraikan definisi dan rumus untuk menghitung panjang busur lingkaran.
   - ▷ Mengetahui definisi dan rumus untuk menghitung luas juring lingkaran serta cara penerapannya.
2. **Mengidentifikasi Hubungan Sudut Pusat dengan Panjang Busur dan Luas Juring**
   - ▷ Menyusun dan memahami hubungan sudut pusat dengan panjang busur dan luas juring.
   - ▷ Menerapkan rumus dan prosedur yang tepat untuk menghitung luas juring dengan menggunakan sudut pusat dan jari-jari lingkaran.
3. **Menganalisis Hubungan Antara Sudut Pusat dan Sudut Keliling yang Menghadap Busur yang Sama**

- ▷ Menguraikan ketentuan yang berlaku dalam sudut pusat dan sudut keliling.
- ▷ Menjelaskan contoh permasalahan yang melibatkan hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling.

4. Mengidentifikasi Permasalahan Terkait Penerapan Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

- ▷ Menerapkan hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring dalam konteks masalah dunia nyata.
- ▷ Memecahkan soal yang melibatkan aplikasi rumus panjang busur dan luas juring dalam berbagai skenario kehidupan nyata.

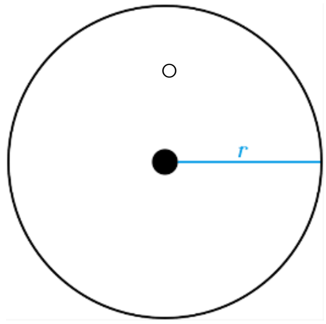
5. Menyelesaikan Masalah Garis Singgung Persekutuan Dalam dan Garis Singgung Persekutuan Luar Dua Lingkaran

- ▷ Menggunakan konsep garis singgung persekutuan dua lingkaran untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.
- ▷ Mengaplikasikan aturan garis singgung persekutuan dua lingkaran dalam situasi kehidupan nyata atau soal-soal praktis.

1. Unsur – unsur Lingkaran

Pengertian Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan semua titik di dalam bidang datar yang jaraknya sama dari suatu titik tetap yang disebut sebagai pusat lingkaran. Pusat lingkaran biasanya dilambangkan dengan huruf "O", dan jarak dari pusat ke sembarang titik pada lingkaran disebut dengan **jari-jari (r)**. Panjang garis lengkung dari P berputar sepanjang tepi lingkaran sampai kembali lagi ke P dinamakan **keliling**. Daerah yang dibatasi oleh lingkaran dinamakan **daerah lingkaran**.



Lingkaran ini memiliki berbagai unsur yang penting untuk dipahami, di antaranya busur, juring, tembereng, dan sebagainya. Dalam matematika, lingkaran memiliki sifat simetri yang sangat tinggi, yang memungkinkan berbagai konsep dan rumus diterapkan pada lingkaran.

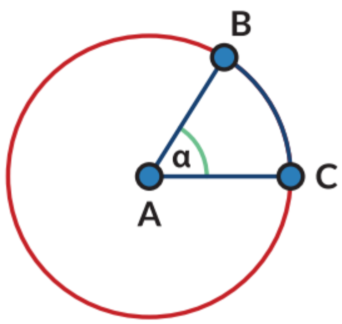
Penutup Lubang Selokan – Freepik.com

Unsur – unsur Lingkaran

Lingkaran tidak hanya terdiri dari garis yang mengelilinginya, namun juga memiliki berbagai unsur yang saling berhubungan.

a. Busur Besar dan Busur Kecil

Busur adalah bagian dari keliling lingkaran yang dibatasi oleh dua titik pada lingkaran tersebut. Tergantung pada panjangnya, busur dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu busur besar dan busur kecil. Tali busur BC membagi busur lingkaran menjadi dua bagian, yaitu:



1) Busur pendek atau busur kecil, yaitu busur BC yang panjangnya kurang dari setengah keliling lingkaran (pada gambar berwarna biru).

2) Busur panjang atau busur besar, yaitu busur BC yang panjangnya lebih dari setengah keliling lingkaran (pada gambar berwarna merah).

Apabila disebutkan busur BC tanpa keterangan, maka yang dimaksud adalah busur BC yang kecil (pendek).

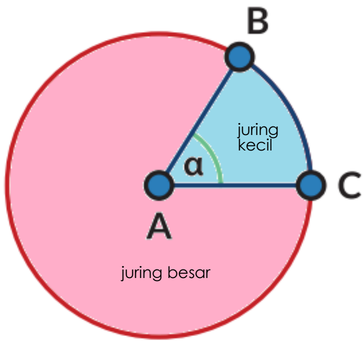
b. Juring Besar dan Juring Kecil

Juring merupakan daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur pada lingkaran. Setiap lingkaran memiliki dua jenis juring, yaitu:

1) Juring kecil, yaitu juring yang luasnya kurang dari setengah luas lingkaran.

2) Juring besar, yaitu juring yang luasnya lebih dari setengah luas lingkaran.

Apabila disebutkan juring tanpa keterangan, maka yang dimaksud adalah juring kecil.



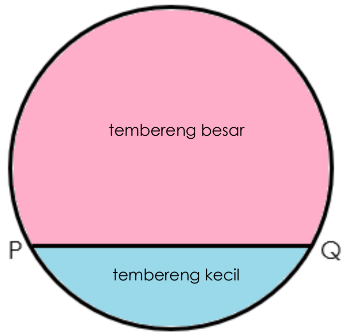
c. Tembereng Besar dan Tembereng Kecil

Tembereng adalah daerah yang dibatasi oleh busur lingkaran dan dua garis singgung dari titik-titik pada lingkaran. Tembereng terbagi menjadi dua jenis berdasarkan besar kecilnya busur yang membatasinya, yaitu:

1) Tembereng kecil, yaitu bagian yang lebih kecil dan terletak di luar juring besar, dibatasi oleh busur kecil.

2) Tembereng besar, yaitu bagian dari lingkaran yang terletak di luar juring kecil dan dibatasi oleh busur besar.

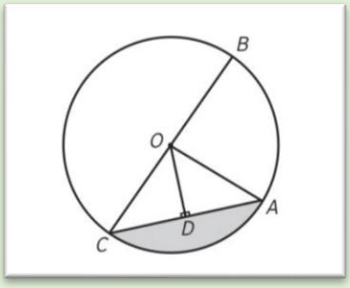
Apabila disebutkan tembereng tanpa keterangan, maka yang dimaksud adalah tembereng kecil.



Setir Mobil – Freepik.com

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut,



a. Sebutkan semua garis yang merupakan: jari-jari, diameter, apotema, dan tali busur.

b. Disebut apakah garis yang diarsir?

Penyelesaian:

a. Jari-jari merupakan garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan titik di keliling lingkaran, yaitu: garis OA, garis OB, dan garis OC.

Diameter merupakan garis lurus yang menghubungkan dua titik di keliling lingkaran dan melalui pusat, yaitu garis BC.

Apotema merupakan garis dari pusat lingkaran yang tegak lurus ke tali busur, yaitu garis OD karena tegak lurus ke tali busur AC.

Tali busur merupakan garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran tanpa harus melewati pusat, yaitu garis AC dan garis AB.

b. Daerah yang diarsir disebut tembereng, bagian dari lingkaran yang dibatasi oleh tali busur dan busurnya.

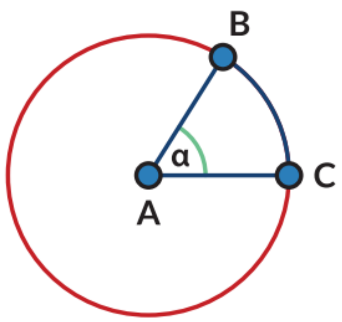
Pojok Matematika

Kenapa Piring dan Gelas Berbentuk Lingkaran?

- Bentuk lingkaran pada piring dan gelas bukan sekadar pilihan estetika, melainkan hasil dari pertimbangan fungsional dan efisiensi. Lingkaran merupakan bentuk yang simetris dan tidak memiliki sudut, sehingga lebih mudah dibentuk dan dicetak dalam proses produksi. Dalam industri keramik atau kaca, pencetakan benda berbentuk lingkaran dapat dilakukan secara lebih cepat dan konsisten, yang berkontribusi pada efisiensi biaya dan waktu produksi.
- Dari sisi penggunaan, piring dan gelas berbentuk lingkaran memungkinkan distribusi panas yang lebih merata saat makanan dipanaskan, terutama dalam *oven microwave* yang bekerja berdasarkan gelombang elektromagnetik. Bentuk ini juga mempermudah pengaturan posisi makanan atau minuman, serta lebih ergonomis saat digunakan bersama alat makan lain seperti sendok dan garpu. Selain itu, bentuk melingkar meminimalkan risiko tumpahan karena tidak memiliki sudut tajam yang rentan terkena dorongan.
- Dalam hal penyimpanan dan penataan, benda berbentuk lingkaran lebih mudah disusun dalam tumpukan tanpa menghasilkan tekanan yang tidak merata pada sisi-sisinya. Ketika disusun dalam lemari atau rak, piring dan gelas berbentuk lingkaran menciptakan stabilitas yang lebih baik dibandingkan bentuk bersudut. Kombinasi antara kepraktisan, keindahan visual, dan kemudahan produksi menjadikan bentuk lingkaran sebagai pilihan utama dalam desain alat makan.

2. Sudut Pusat dan Sudut Keliling

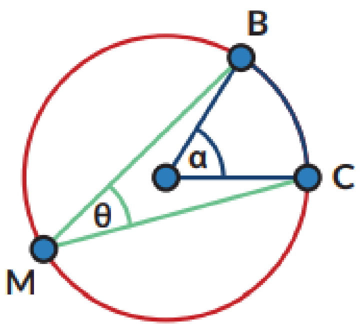
Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling



Sudut BAC dinamakan sudut pusat, yaitu sudut yang titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran. ∠BAC menghadap busur (kecil) BC. Sudut pusat selalu terletak di dalam lingkaran dan memiliki ukuran yang bergantung pada panjang busur yang terbentuk oleh dua jari-jari tersebut.

Titik A adalah adalah titik pusat lingkaran. Titik B, C, dan M terletak pada keliling (busur) lingkaran.

∠BMC dinamakan sudut keliling, yaitu sudut yang titik sudutnya terletak pada keliling lingkaran, ∠BMC menghadap busur BC. Sudut keliling terletak di luar lingkaran, dan besar sudut keliling ini bergantung pada busur yang dihadapinya.

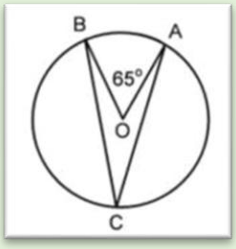


Besar sudut pusat selalu dua kali lebih besar daripada sudut keliling yang menghadap busur yang sama. Artinya, jika suatu sudut pusat terbentuk oleh dua jari-jari yang menghadap busur tertentu, maka sudut keliling yang menghadap busur tersebut akan setengah dari besar sudut pusat.

Bianglala Berbentuk Lingkaran – Freepik.com

Contoh Soal

Pada gambar di bawah ini, O adalah pusat lingkaran dengan besar ∠AOB = 65°. Tentukan besar ∠ACB dan ∠OAB.



Penyelesaian:

∠AOB = 2 × ∠ACB (∠AOB dan ∠ACB menghadap busur AB)

65° = 2 × ∠ACB

∠ACB = 65° ÷ 2

= 32,5°

ΔOAB sama kaki (OA = OB), maka:

∠OAB = (180° − ∠AOB) ÷ 2

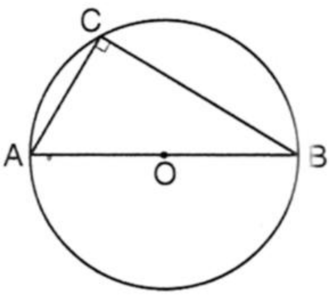
= (180° − 65°) ÷ 2

= 57,5°

Jadi, besar ∠ACB adalah 32,5° dan ∠OAB adalah 57,5°.

Sifat – sifat Sudut Keliling

a. Sudut Keliling Menghadap Diameter Lingkaran



Salah satu sifat penting dari sudut keliling adalah ketika sudut tersebut menghadap pada diameter lingkaran. Dalam hal ini, sudut keliling akan selalu berukuran 90°. Hal ini berlaku untuk setiap titik keliling yang terletak pada busur yang menghadap diameter lingkaran tersebut. Jika tiga titik A, B, C terletak pada lingkaran dan AB adalah diameter, maka ∠ACB siku-siku.

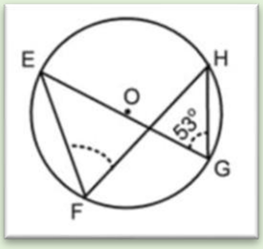
Teorema di atas dikenal dengan Teorema Thales.

b. Sudut – sudut Keliling Menghadap Busur yang Sama

Besar sudut keliling yang menghadap ke busur yang sama adalah sama. Artinya, jika ada dua titik keliling yang berbeda namun menghadap busur yang identik, maka sudut yang terbentuk pada titik tersebut akan sama besar.

Contoh Soal

1. Perhatikan gambar berikut.

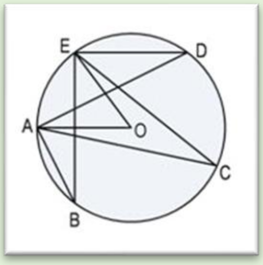


Titik O adalah titik pusat lingkaran dan besar besar sudut EGH = 53°. Tentukan besar sudut EFH.

Penyelesaian:

$\angle EFH = \angle EGH = 53°$ (menghadap busur EH)

2. Perhatikan gambar berikut.



Pusat lingkaran berada di titik O. Apabila $\angle ABE + \angle ACE + \angle ADE = 96°$, hitunglah besar sudut $\angle AOE$.

Penyelesaian:

$\angle ABE$, $\angle ACE$, dan $\angle ADE$ menghadap busur yang sama, yaitu busur AE, maka

$\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE$

$\angle ABE\ \angle ACE = \angle ADE = 96° \div 3$

$= 32°$

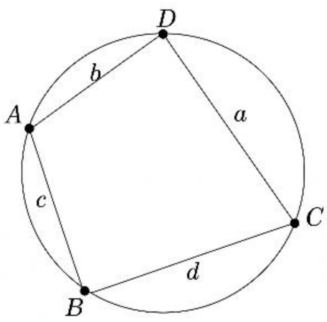
$\angle AOE$ merupakan sudut pusat, sehingga

$\angle AOE = 2 \times 32°$

$= 64°$

Jadi, besar $\angle AOE$ adalah 64°.

Segi Empat Tali Busur



Perhatikan gambar di samping. Sisi AB, BC, CD, dan AD pada segi empat ABCD merupakan tali busur lingkaran, dan titik A, B, C, maupun D terletak pada busur atau keliling lingkaran. Oleh karena itu, bangun ABCD disebut segi empat tali busur. Dengan demikian, segi empat tali busur dibentuk dari empat buah sisi yang merupakan tali busur.

Segi empat tali busur adalah segi empat yang sisi-sisinya merupakan tali busur pada sebuah lingkaran.

a. Hubungan Antar Sudut

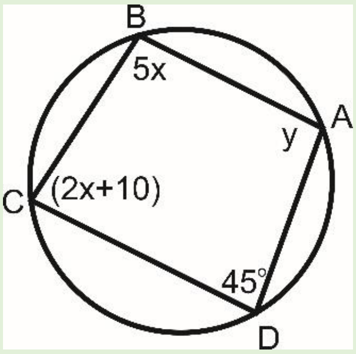
Pada segi empat tali busur, dua sudut yang berhadapan akan memiliki ukuran yang saling berkaitan. Misalnya, jika dua sudut pada segi empat tali busur berbagi satu busur yang sama, maka jumlah sudut berhadapannya akan selalu 180°.

b. Hubungan Antar Ruas Garis

Garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran dan berpotongan di pusat lingkaran membentuk sudut-sudut tertentu yang memiliki hubungan matematis satu sama lain.

Teorema Ptolomeus menyatakan bahwa hasil kali diagonal pada segi empat tali busur sama dengan jumlah hasil kali sisi-sisi yang bersebrangan.

Contoh Soal



Gambar di atas menunjukkan segi empat tali busur ABCD. Tentukan besar nilai ∠BCD.

Penyelesaian:

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$

$5x + 45° = 180°$

$5x = 180° - 45°$

$5x = 135°$

$x = 27°$

sehingga

$\angle BCD = 2x + 10$

$= 2 \cdot 27° + 10$

$= 64°$

Jadi, besar ∠BCD adalah 64°.

Pojok Matematika

Orbit Planet: Lingkaran atau Elips?

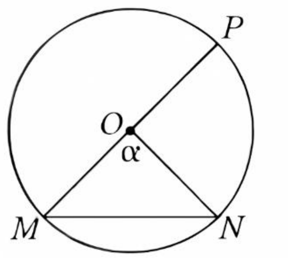
- ▷ Orbit planet dalam tata surya sering kali diasosiasikan dengan bentuk lingkaran, namun secara ilmiah orbit tersebut sebenarnya berbentuk elips. Bentuk elips merupakan hasil dari gaya gravitasi yang bekerja antara planet dan matahari sebagai pusat massa. Pemahaman ini pertama kali dikemukakan oleh Johannes Kepler pada abad ke-17 melalui hukum pertamanya, yang dikenal sebagai *Hukum Kepler tentang Orbit Elips*. Dalam hukum tersebut dinyatakan bahwa setiap planet mengorbit matahari dalam lintasan elips, dengan matahari berada di salah satu titik fokus elips.

- ▷ Meskipun berbentuk elips, banyak orbit planet dalam tata surya memiliki tingkat kepepatan (eksentrisitas) yang sangat rendah, sehingga mendekati bentuk lingkaran. Sebagai contoh, orbit Bumi memiliki eksentrisitas sekitar 0,0167, yang membuatnya hampir bulat bagi pengamatan biasa. Namun, dalam konteks ilmiah dan penghitungan astronomis, perbedaan kecil ini sangat signifikan dan memengaruhi berbagai aspek, seperti variasi musim dan durasi siang-malam.
- ▷ Pemahaman bahwa orbit planet berbentuk elips memiliki implikasi penting dalam astronomi dan navigasi antariksa. Bentuk orbit memengaruhi kecepatan gerak planet saat mendekati atau menjauhi matahari, sesuai dengan hukum Kepler kedua, yaitu planet bergerak lebih cepat saat berada lebih dekat ke matahari. Pengetahuan ini digunakan dalam perencanaan peluncuran wahana antariksa, prediksi posisi benda langit, dan penentuan musim di Bumi serta planet lain. Bentuk elips orbit planet bukan hanya konsep matematika, tetapi juga kunci untuk memahami dinamika gerak benda langit dalam tata surya.

3. Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

Jam Dinding Berbentuk Lingkaran – Freepik.com

Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

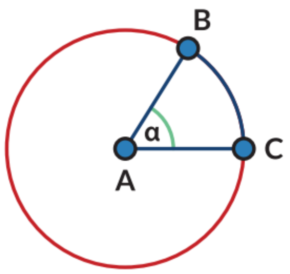


Perhatikan gambar di samping. Diketahui besar ∠MON = α dan besar ∠MOP = 2α.

Akibatnya, panjang busur MN sama dengan $\frac{1}{2}$ panjang busur MNP dan luas juring MON sama dengan $\frac{1}{2}$ kali luas juring MOP.

Jadi,

$$\frac{Besar\ \angle MON}{Besar\ \angle MOP} = \frac{Panjang\ busur\ MN}{Panjang\ busur\ MP} = \frac{Luas\ juring\ MON}{Luas\ juring\ MOP} = \frac{1}{2}$$



Perhatikan gambar di samping. Diketahui besar ∠BAC = α dan sudut satu putaran penuh adalah 360°, sehingga

$$\frac{Besar \angle BAC}{Besar\ sudut\ putaran} = \frac{\alpha}{360°}$$

Jadi,

$$\frac{Panjang\ busur\ BC}{Keliling\ lingkaran} = \frac{Luas\ juring\ BAC}{Luas\ lingkaran} = \frac{\alpha}{360°}$$

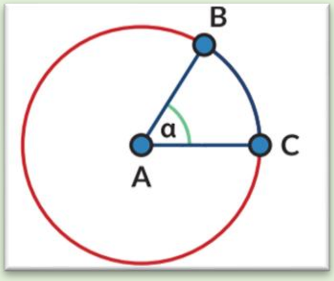
Akibatnya,

Panjang busur BC = $\frac{\alpha}{360°}$ × keliling lingkaran

Luas juring BAC = $\frac{\alpha}{360°}$ × luas lingkaran

Contoh Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



Apabila besar sudut BAC = 60° dan panjang AC = 21 cm, tentukan panjang busur BC.

Penyelesaian:

Panjang busur BC = $\frac{60°}{360°}$ × keliling lingkaran

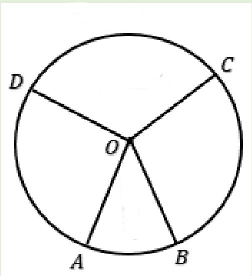
$= \frac{1}{6} \times 2\pi r$

$= \frac{1}{6} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

= 22

Jadi, panjang busur BC adalah 22 cm.

2. Perhatikan gambar berikut.



Pada gambar di atas, panjang busur CD = 12 cm, busur AB = 4 cm, dan luar juring AOB = 16 cm^2. Hitunglah luas juring COD.

Penyelesaian:

Panjang busur DC = 12 cm.

Panjang busur AB = 4 cm.

Luas juring AOB = 16 cm^2.

$\frac{luas\ juring\ COD}{luas\ juring\ AOB} = \frac{busur\ CD}{busur\ AB}$

$\frac{luas\ juring\ COD}{16} = \frac{12}{4}$

luas juring COD = $\frac{12}{4} \times 16$

= 48

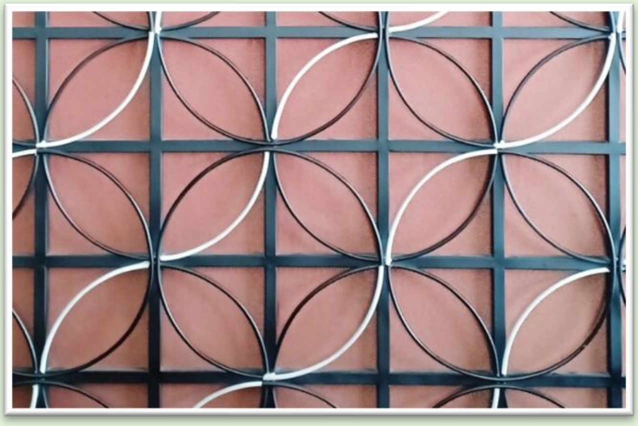
Jadi, luas juring COD adalah 48 cm^2.

Implementasi Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

Berikut dijelaskan contoh permasalahan kontekstual terkait implementasi sudut pusat, panjang busur, dan luas juring.

Contoh Soal

Seorang tukang las akan membuat terali jendela berbentuk juring lingkaran dari besi. Juring tersebut memiliki jari-jari 21 cm dan sudut pusat 45°. Jika tukang las tersebut ingin membuat 100 buah terali, hitunglah panjang besi minimal yang dibutuhkan.



Ilustrasi Terali Besi – Freepik.com

Penyelesaian:

Jari-jari = 21 cm, maka r = 21, dan $\pi = \frac{22}{7}$.

Panjang besi minimal yang dibutuhkan

= (panjang busur + 2r) × 100

$= ((\frac{45°}{360°} \times 2\pi r) + 2r) \times 100$

$= ((\frac{1}{8} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21) + (2 \times 21)) \times 100$

= (16,5 + 42) × 100

= 58,5 × 100

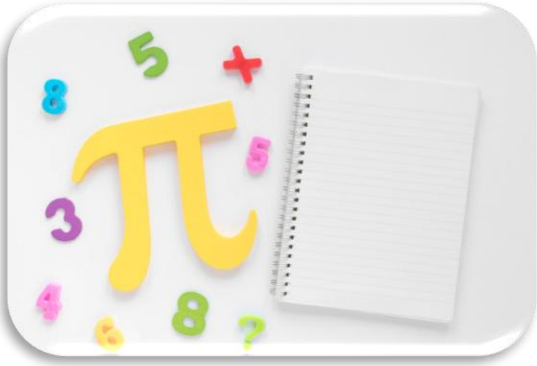
= 5.850

Jadi, panjang besi minimal yang dibutuhkan untuk membuat 100 terali jendela adalah 5.850 cm atau 5,85 m.

Pojok Matematika

Asal – Usul Simbol Pi

- Simbol π (pi) merupakan salah satu konstanta matematika paling terkenal dan digunakan untuk menyatakan perbandingan antara keliling lingkaran dengan diameternya. Nilai π secara desimal tidak pernah berhenti dan tidak pernah berulang, dengan pendekatan umum sebesar 3,14159. Meskipun telah digunakan dalam penghitungan sejak zaman kuno, simbol π sendiri baru digunakan secara formal pada abad ke-18. Pi termasuk dalam bilangan irasional, artinya tidak dapat dituliskan sebagai pecahan sederhana, dan keberadaannya sangat penting dalam berbagai cabang matematika dan fisika.
- Asal-usul penggunaan simbol π berasal dari huruf Yunani kecil "π" yang pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Wales, William Jones, pada tahun 1706. Simbol ini kemudian dipopulerkan secara luas oleh matematikawan terkemuka Leonhard Euler sekitar tahun 1737. Alasan penggunaan huruf π adalah karena merupakan huruf pertama dari kata Yunani *perimetros*, yang berarti keliling. Sebelum simbol π digunakan, banyak matematikawan menggunakan notasi yang berbeda-beda, seperti menggunakan huruf p atau bahkan menuliskan penjelasan panjang untuk menyatakan perbandingan keliling dan diameter.



- Penggunaan π tidak hanya terbatas pada lingkaran, tetapi juga merambah ke berbagai bidang seperti geometri, trigonometri, statistik, fisika gelombang, dan teori bilangan. Dalam praktik modern, π digunakan dalam rumus luas lingkaran, volume bola, panjang busur, serta dalam berbagai model ilmiah dan teknik yang melibatkan rotasi atau periodisitas. Keunikan dan keserbagunaan π menjadikannya sebagai salah satu simbol paling ikonik dalam dunia matematika, dan bahkan diperingati secara internasional setiap tanggal 14 Maret sebagai *Pi Day*.

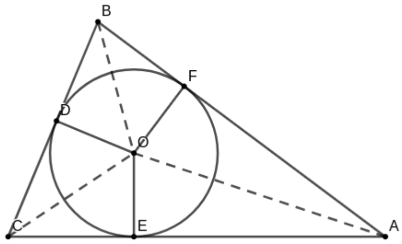
4. Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga

Titik Pusat Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga

a. Titik Pusat Lingkaran Dalam Segitiga

Lingkaran dalam segitiga adalah lingkaran yang berada di dalam segitiga dan menyentuh ketiga sisi bagian dalam pada segitiga tersebut.

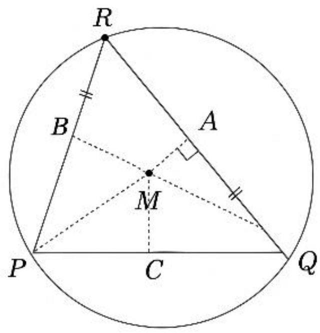
Pada gambar di samping, lingkaran yang berpusat di O menyinggung sisi AB, BC, dan AC. Lingkaran tersebut dinamakan lingkaran dalam pada ∆ABC. Garis AO, BO, dan CO adalah garis bagi ∠A, ∠B, dan ∠C, sedangkan OD, OE, dan OF adalah jari-jari lingkaran.



Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa titik pusat lingkaran dalam segitiga adalah titik potong ketiga garis bagi sudut pada segitiga tersebut.

b. Titik Pusat Lingkaran Luar Segitiga

Lingkaran luar segitiga adalah lingkaran yang melalui ketiga titik pada segitiga tersebut.



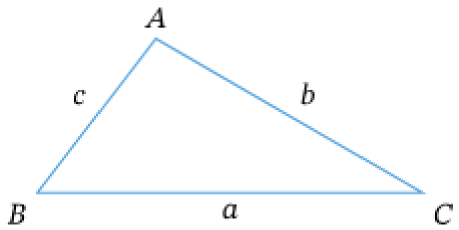
Pada gambar di samping, lingkaran yang berpusat di M melalui ketiga titik sudut pada ∆PQR, yaitu titik P, Q, dan R. Lingkaran tersebut dinamakan lingkaran luar pada ∆PQR.

Garis AM, BM, dan CM merupakan garis sumbu, sedangkan garis MP, MQ, dan dan MR merupakan jari-jari lingkaran.

Titik pusat lingkaran luar segitiga adalah titik potong ketiga garis sumbu sisi-sisi pada segitiga tersebut.

Roda Berbentuk Lingkaran – Freepik.com

Jari – jari Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga



Rumus luas segitiga yang panjang sisi-sisinya a, b, dan c dengan keliling = 2s adalah:

$$\text{L} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a. Jari – jari Lingkaran Dalam Segitiga

Rumus panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah:

$$r = \frac{\text{L}}{s} \text{ atau } r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

r adalah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga, s adalah $\frac{1}{2}$ keliling segitiga = $\frac{1}{2}$ (a + b + c).

b. Jari – jari Lingkaran Luar Segitiga

Rumus panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah

$$R = \frac{abc}{4L} \text{ atau } R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

dengan R adalah panjang jari-jari lingkaran luar segitiga, s adalah $\frac{1}{2}$ keliling segitiga = $\frac{1}{2}$ (a + b + c).

Contoh Soal

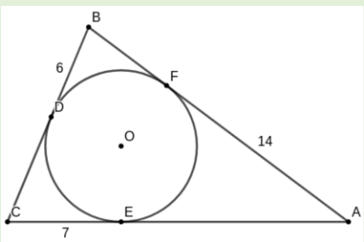
1. Diketahui segitiga ABC dengan lingkaran dalam yang berpusat pada titik O. Lingkaran tersebut menyinggung sisi AB pada titik F, sisi BC pada titik D, dan sisi AC pada titik E. Jika panjang AF = 14, BD = 6, dan CE = 7, tentukan:

   a. keliling segitiga ABC,

   b. panjang OD.

   Penyelesaian:

   Ilustrasi segitiga ABC.



   a. Lingkaran tersebut tersebut merupakan lingkaran dalam segitiga ABC, sehingga berlaku:

   BF = BD = 6

   CD = CE = 7

AE = AF = 14

Keliling segitiga ABC dapat dihitung dengan rumus

K ΔABC = AB+BC+CA

= (AF + BF) + (BD + CD) + (CE + AE)

= (14 + 6) + (6 + 7) + (7 + 14)

= 20 + 13 + 21

= 54

Jadi, keliling segitiga ABC adalah 54 satuan.

b. Ruas garis OD yang menghubungkan titik O dan D merupakan jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Maka perlu menghitung nilai s terlebih dahulu. Nilai s merupakan setengah dari keliling segitiga ABC, sehingga

$s = \frac{1}{2} \times 54 = 27$

kemudian panjang sisi-sisi segitiga ABC:

a = BC = BD + CD = 6 + 7 = 13

b = AC = AE + CE = 14 + 7 = 21

c = AB = AF + BF = 14 + 6 = 20

Panjang ruas garis OD (r) dapat dihitung dengan rumus:

OD = r

$= \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

$= \frac{\sqrt{27(27-13)(27-21)(27-20)}}{27}$

$= \frac{\sqrt{27 \times 14 \times 6 \times 7}}{27}$

$= \frac{\sqrt{15876}}{27}$

$= \frac{126}{27}$

$= \frac{14}{3}$

Jadi, panjang ruas garis OD adalah $\frac{14}{3}$ satuan.

2. Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 7 cm, 24 cm, dan 25 cm. Hitunglah:

a. panjang jari-jari lingkaran luarnya,

b. keliling lingkaran luarnya.

Penyelesaian:

a. a = 7, b = 24, dan c = 25.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$= \frac{1}{2}(7 + 24 + 25)$

$= \frac{1}{2} \times 56$

= 28

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{7 \times 24 \times 25}{4\sqrt{28(28-7)(28-24)(28-25)}}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 25}{\sqrt{28 \times 21 \times 4 \times 3}}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 25}{\sqrt{4 \times 7 \times 3 \times 7 \times 4 \times 3}}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 25}{\sqrt{7^2 \times 3^2 \times 4^2}}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 25}{7 \times 3 \times 4}$$

$$= \frac{25}{2}$$

$$= 12,5$$

Jadi, panjang jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut adalah 12,5 cm.

b. Keliling lingkaran dapat dihitung dengan rumus

$K = 2\pi r$

$= 2 \times 3,14 \times 12,5$

$= 78,5$

Jadi, keliling lingkaran luar segitiga tersebut adalah 78,5 cm.

Pojok Matematika

Kelancaran Gerak pada Roda

- Bentuk lingkaran pada roda bukanlah pilihan sembarangan, melainkan hasil dari pertimbangan fisika dan efisiensi gerak. Lingkaran merupakan satu-satunya bentuk dua dimensi yang memiliki jarak yang sama dari pusat ke seluruh tepinya, sehingga menghasilkan gerakan yang mulus dan stabil saat bergulir. Ketika roda berputar, titik kontak antara roda dan permukaan tanah berpindah secara kontinu tanpa perubahan ketinggian poros roda, sehingga kendaraan dapat bergerak dengan lancar tanpa guncangan berlebih.
- Jika roda memiliki bentuk selain lingkaran, misalnya segi empat atau segitiga, maka gerakan yang dihasilkan akan tersendat-sendat karena ketinggian titik kontak dengan tanah terus berubah-ubah. Hal ini akan menyebabkan kendaraan tidak nyaman dan memerlukan energi tambahan untuk mengatasi ketidakteraturan tersebut. Bentuk lingkaran juga mengurangi gaya gesek statis saat memulai gerak, menjadikannya pilihan ideal untuk efisiensi energi dan kestabilan laju.

- Selain aspek mekanis, bentuk lingkaran mempermudah perputaran roda pada poros dan memungkinkan penggunaan bantalan (*bearing*) secara optimal. Dalam teknik rekayasa, kemudahan rotasi dan kestabilan struktur merupakan kunci untuk menciptakan sistem transportasi yang aman dan andal. Oleh karena itu, sejak penemuan roda pada peradaban kuno, bentuk lingkaran tetap menjadi solusi terbaik yang bertahan hingga era kendaraan modern.

5. Garis Singgung Lingkaran

Pengertian Garis Singgung Lingkaran

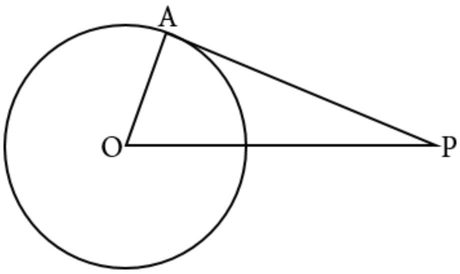
Garis singgung lingkaran adalah garis yang hanya menyentuh lingkaran pada satu titik. Titik di mana garis singgung bersentuhan dengan lingkaran ini disebut titik singgung. Garis singgung memiliki sifat yang sangat penting, yaitu bahwa garis singgung selalu tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran yang menuju titik singgung tersebut.

Jika suatu garis singgung ditarik dari titik luar lingkaran, maka panjang garis singgung dari titik tersebut ke titik singgung akan selalu sama jika ditarik dari titik luar yang berbeda. Ini dikenal dengan teorema garis singgung yang menyatakan bahwa panjang garis singgung yang ditarik dari titik luar lingkaran ke titik singgung yang berbeda akan memiliki panjang yang sama.

Lampu Lalu Lintas Berbentuk Lingkaran – Freepik.com

Panjang Garis Singgung Sebuah Lingkaran

a. Panjang Garis Singgung yang Ditarik dari Titik Diluar Lingkaran



Pada gambar di atas, AP merupakan garis singgung lingkaran yang menyinggung lingkaran di titik A. Garis AP tegak lurus terhadap jari-jari OA. Dengan demikian, ∆OAP adalah segitiga siku-siku.

Panjang garis singgung AP dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras berikut.

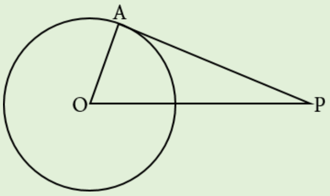
$$OP^2 = OA^2 + AP^2$$

$$AP^2 = OA^2 - OP^2$$

$$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2}$$

Jadi, panjang garis singgung AP = $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2}$.

Contoh Soal



Pada gambar di samping, AP merupakan garis singgung. Panjang jari-jari OA = 10 cm dan panjang OP = 26 cm. Hitunglah panjang garis singgung AP.

Penyelesaian:

AP garis singgung, maka ΔAOP siku-siku di A.

$AP^2 = OP^2 - OA^2$

$= 26^2 - 10^2$

$= 676 - 100$

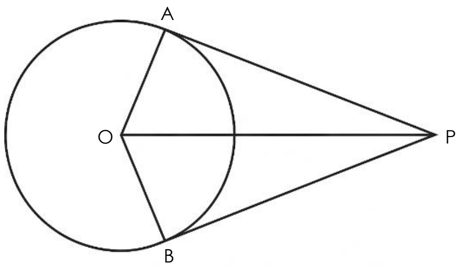
$= 576$

$AP = \sqrt{576}$

$= 24$

Jadi, panjang garis singgung AP adalah 24 cm.

b. Layang – layang Garis Singgung



Garis PA dan PB merupakan garis singgung lingkaran yang berpusat di O, serta AB merupakan tali busur.

- Pada ΔABO, OA = OB = jari-jari.

  Jadi, ΔABO merupakan segitiga sama kaki.
- Pada ΔABP, PA = PB = garis singgung.

  Jadi, ΔABP merupakan segitiga sama kaki.

Segiempat AOBP terbentuk dari dua segitiga sama kaki, yaitu segitiga ABO dan segitiga ABP, yang memiliki alas AB yang saling bertumpuk. Dengan demikian, bangun AOBP membentuk layang-layang. Oleh karena salah satu pasang sisi dari layang-layang AOBP merupakan garis singgung terhadap sebuah lingkaran, maka bangun AOBP disebut sebagai layang-layang garis singgung.

Teorema layang-layang garis singgung menyatakan bahwa panjang kedua garis singgung yang ditarik dari titik luar ke lingkaran yang sama akan selalu sama.

Luas layang-layang AOBP = 2 × ΔOPA

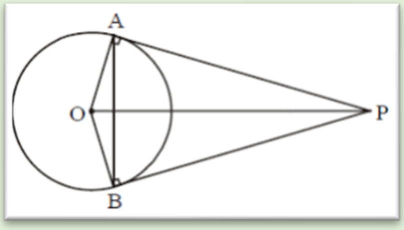
atau

Luas layang-layang AOBP = $\frac{1}{2} \times OP \times AB$

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

Contoh Soal

Pada gambar di samping, PA dan PB merupakan garis singgung lingkaran. Panjang jari-jari lingkaran = 5 cm dan jarak OP = 13 cm. Tentukan:



a. panjang PA,

b. luas layang-layang AOBP,

c. panjang tali busur AB.

Penyelesaian:

a. ΔOAP siku-siku di A, maka:

$PA^2 = OP^2 - OA^2$

$= 13^2 - 5^2$

$= 169 - 25$

$= 144$

$PA = \sqrt{144} = 12$

Jadi, panjang PA adalah 12 cm.

b. Luas layang-layang AOBP = 2 × luas ΔOPA

$= 2 \times (\frac{1}{2} \times OA \times PA)$

$= 2 \times (\frac{1}{2} \times 5 \times 12)$

$= 2 \times 30$

$= 60$

Jadi, luas layang-layang AOBP adalah 60 cm^2.

c. Luas layang-layang AOBP = $\frac{1}{2} \times OP \times AB$

$60 = \frac{1}{2} \times 13 \times AB$

$\leftrightarrow 60 = \frac{13}{2} \times AB$

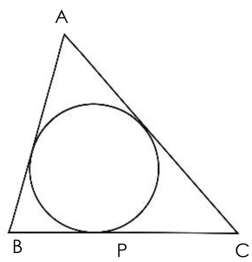
$\leftrightarrow AB = \frac{60 \times 2}{13}$

$\leftrightarrow AB = 9{,}23$

Jadi, panjang tali busur AB adalah 9,23 cm.

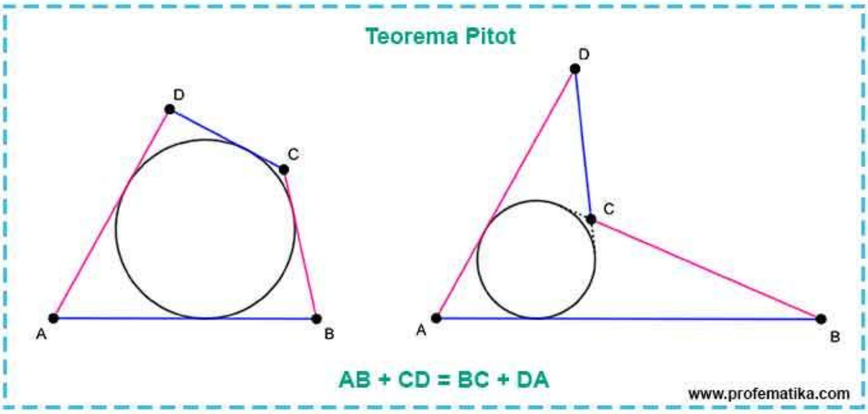
c. Segitiga dan Segi Empat Garis Singgung

Segitiga garis singgung adalah segitiga yang ketiga sisinya menyinggung satu lingkaran yang sama. Pada segitiga garis singgung ABC, berlaku hubungan:



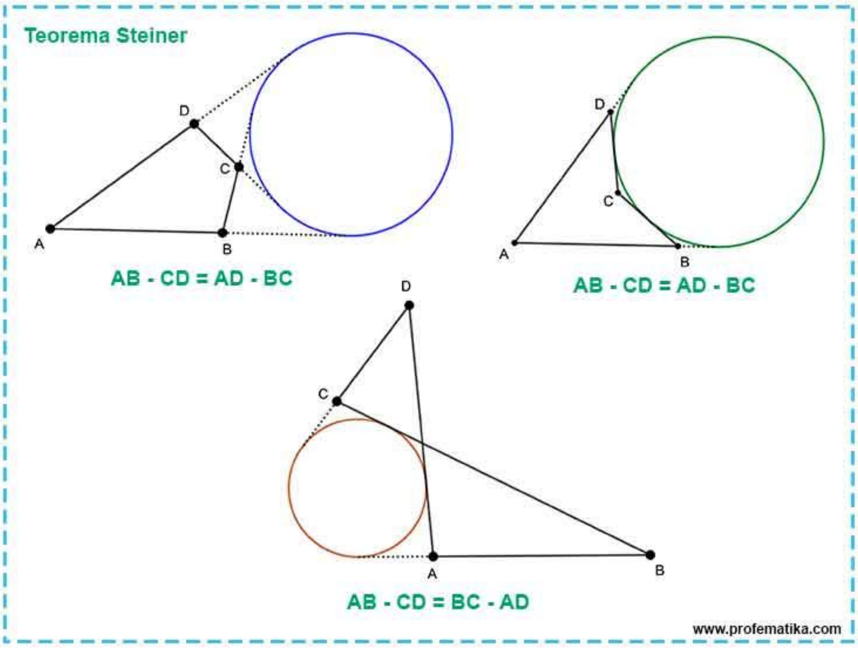
$$AB + PC = AC + PB$$

di mana P merupakan titik singgung pada sisi BC. Hubungan ini dikenal sebagai Teorema Pitot.



Teorema Pitot juga berlaku pada segi empat garis singgung, berlaku persamaan:

$$AB + CD = BC + DA$$



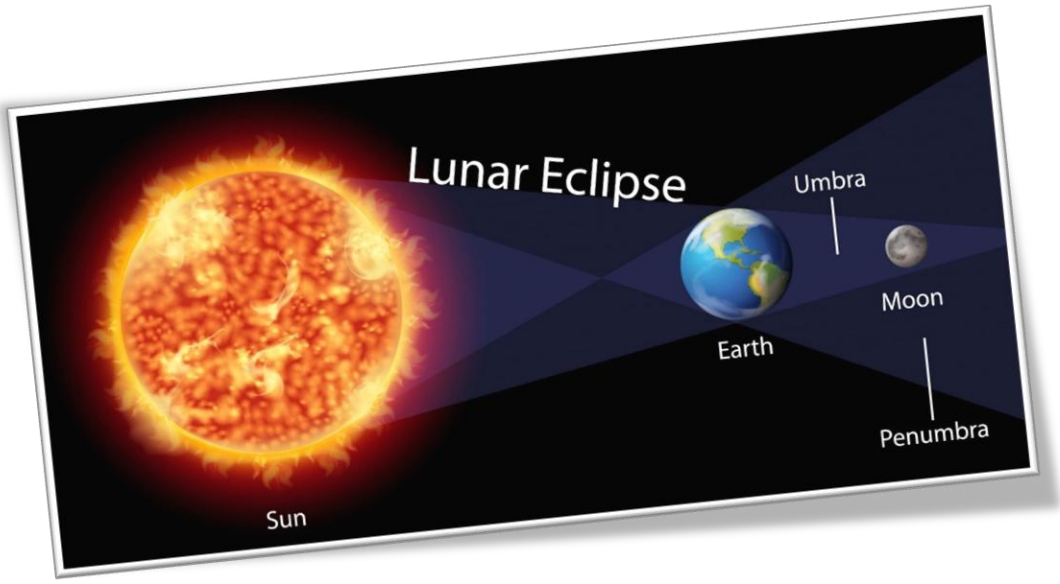
Jika lingkarannya berada di luar, berlaku:

$AB - CD = |AD - BC|$

dengan $AB > CD$.

Teorema ini dikenal dengan Teorema Steiner.

6. Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

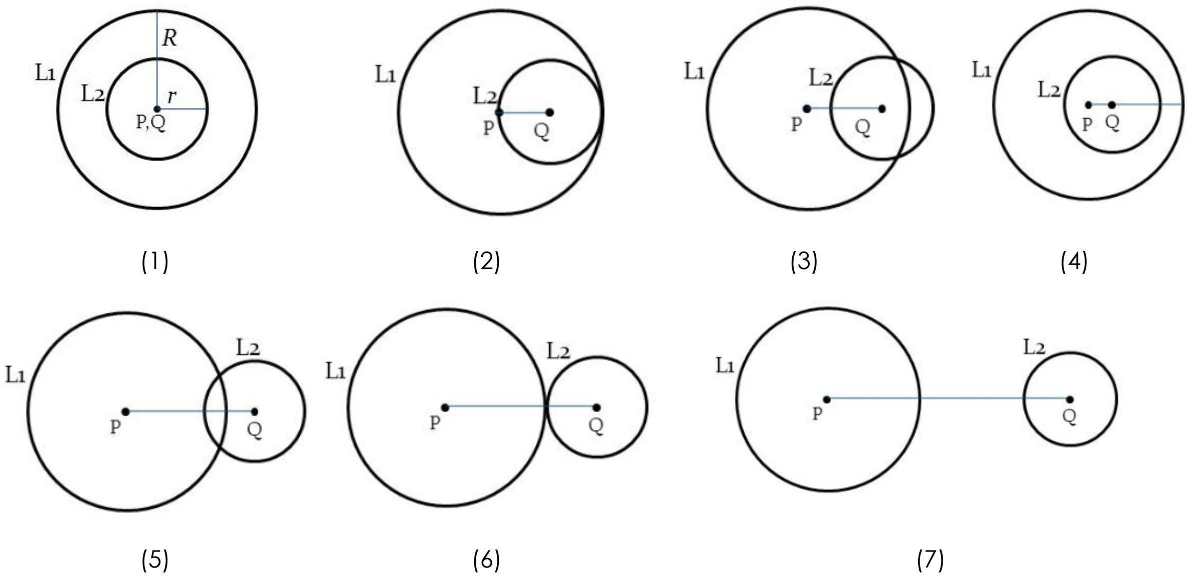


Gerhana Bulan sebagai Penerapan Garis Singgung Lingkaran – Freepik.com

Kedudukan Dua Lingkaran

Dalam geometri, dua lingkaran dapat memiliki beberapa kedudukan satu sama lain:

1) L_2 terletak di dalam L_1 dengan P dan Q berimpit, sehingga panjang PQ = 0.
2) L_2 terletak di dalam L_1 dan PQ < r < R, dalam hal ini tidak konsentris.
3) L_2 terletak di dalam L_1 dan $PQ = r = \frac{1}{2}R$, sehingga L_1 dan L_2 bersinggungan di dalam.
4) L_2 berpotongan dengan L_1 dan r < PQ < R.
5) L_1 berpotongan dengan L_2 dan r < PQ < R + r.
6) L_1 terletak di luar L_2 dan PQ = R + r, sehingga L_1 dan L_2 bersinggungan di luar.
7) L_1 terletak di luar L_2 dan PQ > R + r, sehingga L_1 dan L_2 saling terpisah.

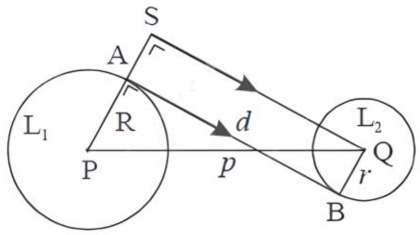


Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

Garis singgung persekutuan adalah garis yang menyinggung dua buah lingkaran sekaligus.

a. Garis Singgung Persekutuan Dalam

Misalkan lingkaran P dan lingkaran Q berturut-turut memiliki jari-jari R dan r. Garis AB adalah garis singgung Persekutuan dalam lingkaran P dan lingkaran Q. Panjang garis pusat lingkaran P dan lingkaran Q adalah p.



Perhatikan segitiga siku-siku PQS, dengan titik siku-siku berada di titik S.

PS = PA + AS

= R + r (karena AS = BQ)

PQ = p dan QS = AB

Berdasarkan teorema Pythagoras, didapat:

$QS^2 = PQ^2 - PS^2$

$= p^2 - (R + r)^2$

$QS = \sqrt{p^2 - (R + r)^2}$

Karena QS = AB, maka AB = QS = $\sqrt{p^2 - (R + r)^2}$.

Contoh Soal

Jarak titik pusat dua lingkaran adalah 25 cm dan panjang garis singgung persekutuan dalamnya adalah 20 cm. Jika panjang jari-jari lingkaran pertama adalah 2 kali panjang jari-jari lingkaran kedua, hitunglah panjang jari-jari lingkaran pertama.

Penyelesaian:

Panjang garis singgung persekutuan dalam 20 cm, maka d = 20.

Jarak kedua pusatnya 25 cm, maka p = 25.

Panjang jari-jari lingkaran kedua = r_2, maka jari-jari lingkaran pertama = $r_1 = 2r_2$

$d^2 = p^2 - (r_1 + r_2)^2$

$20^2 = 25^2 - (2r_2 + r_2)^2$

$400 = 625 - (3r_2)^2$

$400 = 625 - 9r_2^2$

$9r_2^2 = 625 - 400$

$9r_2^2 = 225$

$r_2^2 = 225 \div 9$

$r_2^2 = 25$

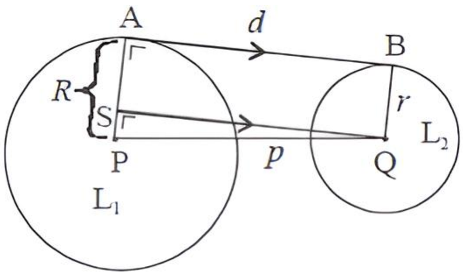
$r_2 = \sqrt{25}$

$= 5$

Jadi, panjang jari-jari lingkaran pertama = $2r_2 = 2 \times 5 = 10$.

b. Garis Singgung Persekutuan Luar

Misalkan lingkaran P dan lingkaran Q berturut-turut memiliki jari-jari R dan r. Garis AB adalah garis singgung persekutuan luar lingkaran P dan lingkaran Q. Panjang garis pusat lingkaran P dan lingkaran Q adalah p.



Garis yang sejajar AB melalui Q, sehingga memotong AP di S.

Segitiga PQS siku-siku di S.

PS = R − r, SQ = AB, dan PQ = p.

Berdasarkan teorema Pythagoras, didapat:

$PQ^2 = PS^2 + SQ^2$

$SQ^2 = PQ^2 - PS^2$

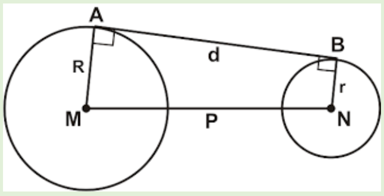
$\quad = p^2 - (R - r)^2$

$SQ = \sqrt{p^2 - (R - r)^2}$

Karena SQ = AB, maka $AB = QS = \sqrt{p^2 - (R - r)^2}$.

Contoh Soal

Pada gambar berikut, panjang jari-jari AM = 26 cm, panjang jari-jari BN = 17 cm, dan jarak MN = 41 cm.



Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar AB.

Penyelesaian:

Panjang jari-jari AM = 26 cm, maka R = 26.

Panjang jari-jari BN = 17 cm, maka r = 17.

Panjang garis pusat = 41 cm, maka p = 41.

$AB^2 = p^2 - (R - r)^2$

$\quad = 41^2 - (26 - 17)^2$

$\quad = 41^2 - 9^2$

$\quad = 1.681 - 81$

$\quad = 1.600$

$AB = \sqrt{1.600}$

$\quad = 40$

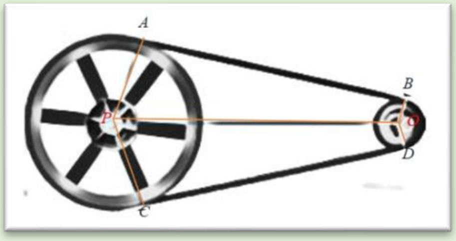
Jadi, panjang garis singgung persekutuan luar AB adalah 40 cm.

Penerapan Garis Singgung Lingkaran

Rantai Sepeda sebagai Penerapan Garis Singgung Lingkaran – Freepik.com

Berikut disajikan permasalahan kontekstual terkait penerapan garis singgung lingkaran.

Contoh Soal



Roda penggerak (pulley) kompresor angin terdiri atas lingkaran besar dan lingkaran kecil yang dihubungkan dengan tali karet (van belt). Panjang jari-jari lingkaran masing-masing 19 cm dan 12 cm, jarak kedua titik pusatnya 50 cm, dan besar sudut pusat APC = 150°. Hitunglah panjang tali (van belt) penghubung kedua lingkaran.

Penyelesaian:

- Menghitung panjang garis singgung AB dan CD.

  $AB^2 = PO^2 - (AP - BO)^2$

  $= 50^2 - (19 - 12)^2$

  $= 2.500 - 7^2$

  $= 2.500 - 49 = 2.451$

  $AB = \sqrt{2.451} \approx 49.5$

  Panjang garis singgung AB = CD = 49,5 cm.

- Menghitung panjang busur besar AC.

  Besar sudut refieks APC = 360° − 150° = 210°

  Panjang busur besar CA = Sudut refleks APC ÷ 360° x keliling lingkaran besar

  = 210/360 (2 x 3,14 x 19)

  = 7/12 x 119,2

  ≈ 69,6

- Menghitung panjang busur BD.

  Besar ∠BOD = ∠APC = 150°.

  Panjang busur BD = BOD/360° x keliling lingkaran

  $= \frac{150°}{360°} \times (2 \times 3{,}14 \times 12)$

$= \frac{5}{12} \times 75{,}36$

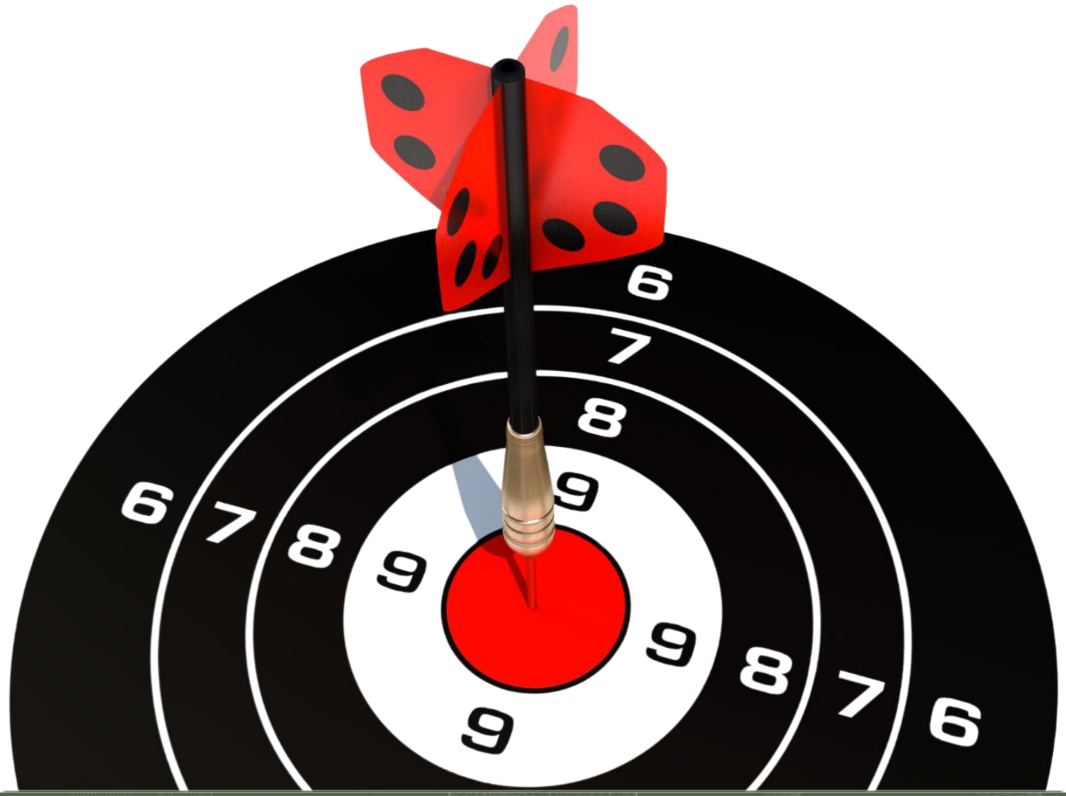
$= 31{,}4$

Jadi, panjang tali karet yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut

= busur besar AC + busur BD +AB + CD

= 69,6 + 31,4 + 49,5 + 49,5

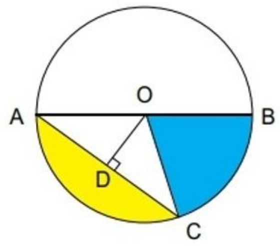
= 200 cm atau = 2 m



Rangkuman

▷ Lingkaran adalah himpunan semua titik di dalam bidang datar yang jaraknya sama dari suatu titik tetap yang disebut sebagai pusat lingkaran.

▷ Unsur-unsur lingkaran



- Garis AO disebut jari-jari dan AB disebut diameter.
- Garis lengkung AC dan BC disebut busur.
- Garis lurus AC disebut tali busur.
- Garis OD yang tegak lurusdengan AC disebut apotema.
- Daerah arsiran yang diapit oleh dua jari-jari OB dan OC, dan dibatasi busur BC disebut juring atau sektor.
- Daerah arsiran yang dibatasioleh tali busur AC dan busur AC disebut tembereng.

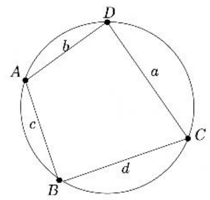
▷ Untuk setiap lingkaran berlaku hubungan berikut:

- Besar sudut pusat = 2 kali sudut keliling yang menghadap busur yang sama.
- Besar sudut keliling = $\frac{1}{2}$ kali sudut pusat yang menghadap busur yang sama,

▷ Besar setiap sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran adalah 90°.

▷ Besar sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

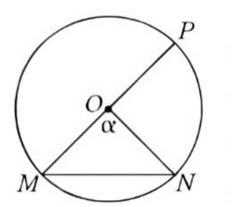
▷ Segi empat tali busur ABCD adalah segi empat tali busur dengan AB, BC, CD, dan AD merupakan tali busur.



Sifat segi empat tali busur:

$\angle A + \angle C = 180°$ dan $\angle B + \angle D = 180°$.

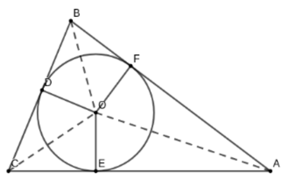
▷ Untuk setiap lingkaran, berlaku hubungan berikut:



- $\frac{\angle MON}{\angle MOP} = \frac{busur\ MN}{busur\ MP} = \frac{Luas\ juring\ MON}{Luas\ juring\ MOP}$.
- Panjang busur MN = $\frac{\angle MON}{360°} \times$ keliling lingkaran.
- Luas juring MON = $\frac{\angle MON}{360°} \times$ luas lingkaran.

▷ Titik pusat lingkaran dalam suatu segitiga merupakan titik potong ketiga garis bagi sudut dalam segitiga tersebut.

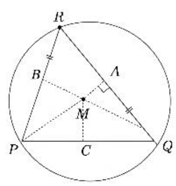
▷ Rumus panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah:



- r = $\frac{L}{s}$ atau r = $\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$
- $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ adalah luas ΔABC.
- s = $\frac{1}{2}$(a + b + c), dengan s adalah setengah keliling segitiga.

▷ Titik pusat lingkaran luar suatu segitiga adalah titik potong ketiga garis sumbu sisi-sisi segitiga tersebut.

▷ Rumus panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah:



- R = $\frac{abc}{4L}$ atau R = $\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$
- $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ adalah luas ΔPQR.
- s = $\frac{1}{2}$(a + b + c), dengan s adalah setengah keliling segitiga.

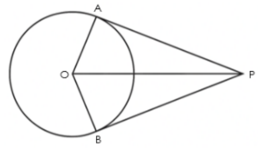
▷ Sifat garis singgung pada lingkaran

1) Garis singgung suatu lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran hanya pada satu titik.

2) Garis singgung suatu lingkaran tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran yang melalu ititik singgungnya.

▷ Layang-layang garis singgung

Segi empat AOBP di samping, sisi-sisinya terbentuk dari sepasang garis singgung lingkaran dan sepasang jari-jari lingkaran dinamakan layang-layang garis singgung.



Luas AOBP = 2 × luas ΔAOP = $\frac{1}{2}$ × OP × AB.

▷ Garis singgung persekutuan adalah garis yang menyinggung dua buah lingkaran sekaligus. Terdapat dua jenis garis singgung persekutuan pada lingkaran, yaitu garis singgung persekutuan dalam dan gari singgung persekutuan luar.

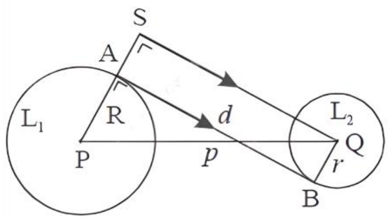
▷ Panjang garis singgung persekutuan dua lingkaran

1) Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran dinyatakan dengan $d^2 = p^2 - (R + r)^2$

   d: panjang garis singgung persekutuan dalam,

   p: jarak pusat lingkaran pertama dan kedua,

   R, r: jari-jari lingkaran pertama dan kedua

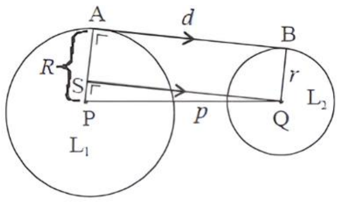


2) Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran dinyatakan dengan $l^2 = p^2 - (R - r)^2$ dengan R > r.

   l: panjang garis singgung persekutuan luar

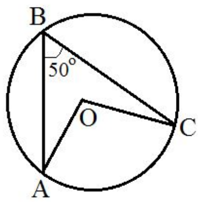
   p: jarak pusat lingkaran pertama dan kedua,

   R, r: jari-jari lingkaran pertama dan kedua



Latihan Soal

1. Perhatikan gambar berikut.



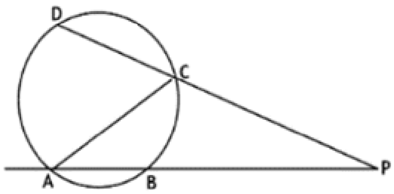
Lingkaran di atas memiliki pusat di titik O. Besar sudut AOC adalah …

a. 25^0	d. 65^0
b. 100^0	e. 90^0
c. 75^0	

2. Di tepi jalan raya kota A terdapat rambu lalu lintas berbentuk juring lingkaran dengan jari-jari berukuran 7 cm dan sudut pusatnya 90^0. Maka luas juring lingkaran rambu lalu lintas tersebut adalah …

a. 38,5 cm^2	d. 37 cm^2
b. 37,5 cm^2	e. 38 cm^2
c. 39,5 cm^2	

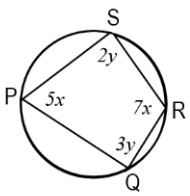
3. Perhatikan gambar berikut.



Diketahui $\angle BAC = 20^0$ dan $\angle DCA = 60^0$ maka besar $\angle APC$ adalah ….

a. 65^0	d. 40^0
b. 80^0	e. 60^0
c. 45^0	

4. Berdasarkan gambar berikut, nilai x + y = …



a. 93	d. 88
b. 72	e. 65
c. 51	

5. Sebuah lingkaran diketahui memiliki jari-jari 14 cm. Jika sudut pusat lingkaran tersebut merupakan sudut siku-siku, luas tembereng yang terbentuk adalah …

a. 22 cm²

b. 56 cm²

c. 144 cm²

d. 196 cm²

e. 64 cm²

6. Diketahui segitiga dengan sisi-sisi 8 cm, 15 cm, dan 17 cm. Panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga tersebut adalah …

a. 12 cm

b. 10 cm

c. 8 cm

d. 4 cm

e. 6 cm

7. Jika panjang sisi-sisi segitiga adalah 12 cm, 35 cm, dan 37 cm, panjang jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut adalah …

a. 15

b. 18

c. 21

d. 24

e. 27

8. Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah 16 cm. Jika panjang jari-jari lingkaran-lingkarannya masing-masing 7 cm dan 5 cm, maka jarak pusat kedua lingkaran adalah …

a. 20 cm

b. 22 cm

c. 24 cm

d. 15 cm

e. 18 cm

9. Jarak pusat dua lingkaran adalah 20 cm, dan panjang garis singgung persekutuan luar 16 cm. Jika panjang salah satu jari jari 14 cm maka panjang jari-jari yang lain adalah …

a. 5 cm

b. 4 cm

c. 3 cm

d. 2 cm

e. 1 cm

10. Terdapat dua lingkaran yang saling bersinggungan di luar. Jari-jari lingkaran kecil adalah 3 cm dan jari-jari lingkaran besar adalah 15 cm. Jarak antara kedua pusat lingkaran adalah 20 cm. Panjang garis singgung persekutuan luar yang terbentuk adalah …

a. 15

b. 20

c. 18

d. 16

e. 14

11. 

Diketahui empat buah kaleng dengan diameter masing-masing kaleng adalah 28 cm. panjang tali yang dibutuhkan untuk mengikat kaleng-kaleng tersebut adalah …

a. 100 cm

b. 150 cm

c. 200 cm

d. 250 cm

e. 300 cm

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 11 BAB 2

Referensi

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (11th ed.). Wiley.

Boyer, Carl B., & Merzbach, Uta C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

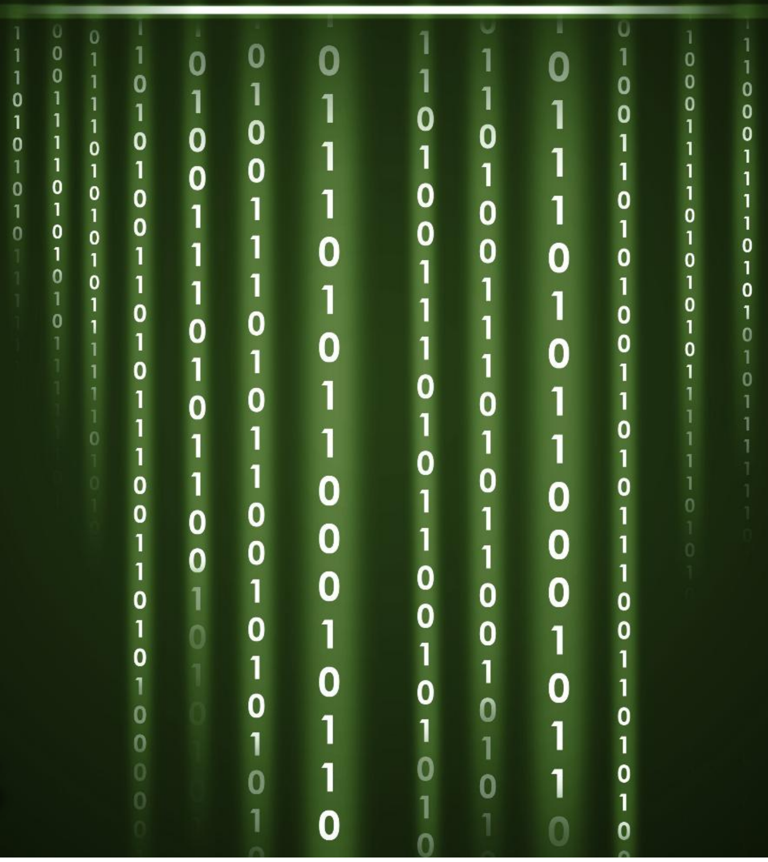
Halliday, David, Resnick, Robert, & Walker, Jearl. (2013). *Fundamentals of Physics* (10th ed.). Wiley.

Katz, Victor J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3rd ed.). Pearson.

Noormandiri, B. K. (2023). *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

Widodo, S. A. (2018). *Pembelajaran Matematika: Teori dan Praktik* (Edisi Revisi). PT Remaja Rosdakarya.

Yulianti, L. (2015). *Analisis Gerak Melingkar pada Roda Kendaraan*. Jurnal Pendidikan Fisika Indonesia, 11(2), 123–130



BAB 3

MATRIKS

Karakter Pelajar Pancasila

Kreatif, Benalar Kritis, Mandiri.

Kata Kunci: Matriks, Identitas, Ordo, Transpos.

Tujuan Pembelajaran: Eksplorasi Matriks dengan Menyenangkan

1. Mendeskripsikan Data dalam Bentuk Matriks

- ▷ Mengubah data numerik atau informasi yang terorganisir menjadi bentuk matriks yang sesuai.
- ▷ Mengidentifikasi elemen-elemen dalam matriks yang merepresentasikan data.

2. Memahami Matriks dan Kesamaan Antar Matriks

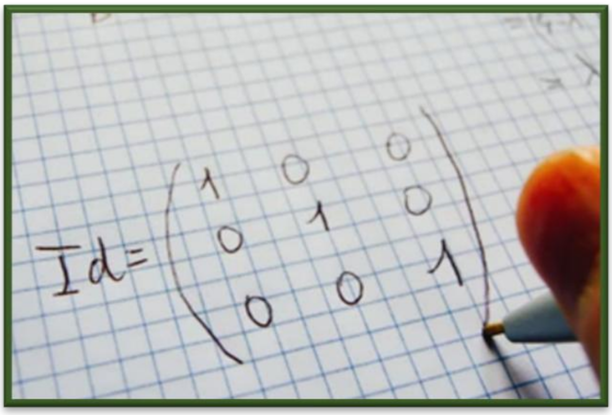
- ▷ Menguraikan konsep matriks, struktur, dan fungsinya dalam matematika.
- ▷ Menjelaskan contoh permasalahan yang melibatkan matriks dalam masalah kontekstual.

3. Menganalisis Operasi pada Matriks

- ▷ Melakukan operasi penjumlahan dan pengurangan matriks dengan syarat ordo yang sama.

- ▷ Menyusun dan melaksanakan operasi perkalian matriks yang memenuhi syarat-syarat tertentu.
- ▷ Memecahkan soal yang melibatkan aplikasi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpos matriks.

Definisi Matriks



Ilustrasi Matriks – shutterstock.com · 366668009

Matriks adalah susunan angka atau elemen yang disusun tanpa dimaksudkan untuk menghitung total dari angka-angka tersebut. Matriks merupakan sekumpulan bilangan yang disusun berbentuk persegi panjang atau persegi. Anggota yang ditulis mendatar dinamakan **baris** dan yang ditulis menurun dinamakan **kolom** yang semua anggotanya terletak di dalam suatu tanda kurung.

Secara umum, matriks dengan ukuran m × n (dibaca: m baris dan n kolom) akan memiliki m baris dan n kolom. Sebagai contoh, matriks berukuran 2 × 3 (dua baris dan tiga kolom) dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 8 \\ 6 & 18 & 5 \end{pmatrix}$$

Angka-angka pada matriks A seperti 25, 20, … dinamakan unsur-unsur atau anggota matriks A. Anggota dalam ke-i dan kolom ke-j; biasanya diwakili oleh simbol a_{ij}. Misalnya, dalam matriks A di atas:

1) a_{12} mewakili 20, yaitu anggota matriks yang terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-2.

2) a_{23} mewakili 5, yaitu anggota matriks yang terletak pada baris ke-2 dan kolom ke-3.

Dalam kehidupan sehari-hari, matriks digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, transformasi geometri, program komputer, jadwal siaran televisi, dan lain-lain. Oleh karena itu, pemahaman yang baik tentang matriks dan berbagai operasi yang dapat dilakukan padanya sangat penting untuk mempelajari topik-topik yang lebih lanjut dalam matematika dan ilmu terkait lainnya.

Contoh Soal

Suatu SMA memiliki tiga jenis ekstrakurikuler yang dapat diikuti oleh kelas X. Ekskul basket diikuti oleh 15 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan, ekskul panahan diikuti oleh 18 siswa laki-laki dan 20 siswa perempuan, ekskul pramuka diikuti oleh 24 siswa laki-laki dan 10 siswa perempuan. Susunlah suatu matriks berdasarkan keterangan di atas.

Ilustrasi Ekskul Basket – Freepik.com

Penyelesaian:

Data di atas akan disajikan dalam model matematika seperti tabel berikut.

Ekstrakurikuler	Jenis Kelamin	
	Laki-laki	Perempuan
Basket	15	12
Panahan	18	20
Pramuka	24	10

Data dari tabel tersebut disusun menjadi sebuah matriks.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 18 & 20 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriks A di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom, biasanya ditulis 3 × 2.

Ordo Satu Matriks

Secara umum, nama suatu matriks ditulis menggunakan huruf kapital. Misalnya matriks P seperti matriks berikut. Matriks P memiliki 4 baris dan 3 kolom, sehingga ordo matriks adalah 4×3.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 9 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Jika suatu matriks A memiliki baris sebanyak m dan memiliki kolom sebanyak n, maka ordo matriks A adalah $m \times n$. Contoh matriks dengan ordo berbeda dapat dilihat pada matriks A, B, C, dan D berikut.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ Ordo A = 2×3

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Ordo B = 3×2

$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Ordo C = 1×4

$D = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ Ordo D = 3×1

Pojok Matematika

Kaifangfa: Konsep Matriks dari Jepang

- Konsep matriks yang dikenal dalam matematika modern sebenarnya memiliki akar sejarah yang cukup panjang dan melibatkan kontribusi dari berbagai peradaban. Salah satu asal-usul konsep ini dapat ditelusuri pada tradisi matematika Jepang yang disebut Kaifangfa. Kaifangfa merupakan metode penghitungan yang berkembang pada abad ke-17 dan ke-18, terutama dalam pemecahan sistem persamaan linear. Pada masa itu, para matematikawan Jepang menggunakan tabel atau susunan angka dalam bentuk persegi panjang untuk menyelesaikan perhitungan yang melibatkan beberapa variabel sekaligus.
- Dalam metode Kaifangfa, angka-angka disusun dalam bentuk tabel seperti matriks modern, di mana baris mewakili persamaan, dan kolom mewakili variabel. Penggunaan tabel ini memungkinkan para matematikawan untuk melakukan perhitungan secara sistematis dan lebih terstruktur. Meskipun tidak secara eksplisit disebut "matriks", pendekatan ini menunjukkan konsep dasar yang serupa dengan matriks yang dikenal saat ini, yaitu penyusunan angka dalam bentuk persegi panjang guna mempermudah penyelesaian masalah matematika. Metode ini juga memperlihatkan penggunaan determinan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, yang kemudian berkembang menjadi bagian penting dalam aljabar linear.
- Seiring berjalannya waktu, konsep serupa juga muncul di Eropa pada abad ke-19 melalui karya matematikawan seperti Arthur Cayley dan James Joseph Sylvester, yang secara eksplisit memperkenalkan notasi matriks dalam bentuk yang lebih formal. Dengan demikian, meskipun matematika modern sering kali mengaitkan matriks dengan perkembangan di Eropa, akar konsepnya dapat ditemukan dalam tradisi matematika Jepang. Kaifangfa menjadi salah satu bukti bahwa pemikiran matematis yang serupa dapat muncul secara independen di berbagai belahan dunia, menunjukkan kekayaan dan keragaman sejarah ilmu matematika.

2. Matriks – matriks Khusus

Seseorang Menghitung Menggunakan Kalkulator – Freepik.com

Matriks Kolom dan Matriks Baris

$A = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matriks A di atas memiliki 1 kolom dan 4 baris. Matriks yang memiliki 1 kolom disebut matriks kolom. Ordo dari matriks A tersebut adalah 4 × 1.

Suatu matriks A dinamakan **matriks kolom** apabila memiliki ordo m × 1. Contoh matriks kolom dapat dilihat pada matriks B dan C berikut.

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ordo B = 5 × 1

$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ordo C = 2 × 1

Matriks P berikut memiliki 1 baris dan 5 kolom. Matriks yang hanya memiliki 1 baris dinamkan matriks baris. Ordo dari matriks P adalah 1 × 5.

$P = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Suatu matriks A dinamakan **matriks baris** apabila memiliki ordo 1 × n. Contoh matriks baris dapat dilihan pada matriks X dan Y berikut.

$X = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$ Ordo X = 1 × 3

$Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Ordo Y = 1 × 4

Matriks Nol

Suatu matriks dinamakan **matriks nol** apabila anggota matriks tersebut merupakan angka nol. Matriks nol biasanya diwakili dengan $0_{m \times n}$. Berikut merupakan contoh-contoh dari matriks $0_{m \times n}$.

$$0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks Persegi

Suatu matriks dinamakan **matriks persegi** apabila matriks tersebut memiliki ordo (m × m). Berikut merupakan contoh matriks persegi.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ordo P = 2 × 2 Ordo Q = 4 × 4

Matriks Diagonal

Suatu matriks dinamakan **matriks diagonal** apabila matriks tersebut adalah matriks persegi dengan anggota diagonal utama sekurang-kurangnya satu bilangan bukan nol, dan anggota yang lain nol. Matriks-matriks berikut merupakan contoh matriks diagonal.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ordo P = 2 × 2 Ordo Q = 4 × 4 Ordo R = 3 × 3

Matriks Skalar

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriks G di atas merupakan matriks diagonal.

Apabila anggota $a_{11} = a_{22} = a_{33} = k$, di mana k suatu bilangan bukan nol, maka matriks G dinamakan **matriks skalar**. Matriks-matriks berikut merupakan contoh matriks skalar.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Apabila pada matriks skalar nilai k = 1, maka matriks itu dinamakan matriks identitas.

Matriks Identitas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks I di atas merupakan matriks persegi dengan anggota pada diagonal utama adalah satu, dan anggota lainnya adalah nol.

Matriks persegi yang seperti matriks I dinamakan **matriks identitas**. Matriks identitas berfungsi sebagai elemen netral dalam operasi perkalian matriks.

Ordo matriks I adalah 3 × 3 dan pada umumnya ditulis I_3.

Matriks-matriks berikut merupakan contoh matriks identitas.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks Segitiga

Misalkan suatu matriks persegi berordo n dengan elemen-elemen matriks yang berada di bawah diagonal utama atau di atas diagonal utama semuanya nol. Matriks dengan karakteristik demikian dinamakan matriks segitiga. Terdapat dua macam matriks segitiga, yaitu:

▷ Matriks segitiga atas, yaitu matriks segitiga dengan elemen-elemen di bawah diagonal utama semuanya nol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ \mathbf{0} & 5 & 4 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

▷ Matriks segitiga bawah, yaitu matriks segitiga dengan elemen-elemen di atas diagonal utama semuanya nol.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & -2 & \mathbf{0} \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Transpos Matriks

Misalkan diketahui ordo matriks A adalah m × n. Matriks A transpos ditulis A^T atau A^t berordo n × m dibentuk dengan menulis baris pertama matriks A sebagai kolom pertama untuk matriks A^T, baris kedua dari A sebagai kolom kedua untuk A^T, dan baris ketiga dari A sebagai kolom ketiga untuk matriks A^T, dan seterusnya baris ke-m matriks A sebagai kolom ke-m untuk matriks A^T.

Matriks A^T yang dibentuk dengan menulis setiap baris dari A sebagai kolom yang bersesuaian untuk A^T dinamakan **matriks A transpos**.

Berikut merupakan dua contoh matriks transpos dari matriks C dan D.

Jika $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, maka $C^T = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{pmatrix}$

Jika $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, maka $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

Contoh Soal

1. Diketahui matriks P = $\begin{pmatrix} 12 & 6 & -1 \\ 10 & -2 & 7 \\ 8 & 15 & 4 \end{pmatrix}$. Tentukan transpos matriks P.

   Penyelesaian:

   $P^T = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 \\ 6 & -2 & 15 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks B merupakan matriks 3 × 3 dan $a_{ij} = -4i + 3j$. Tentukan matriks B.

   Penyelesaian:

   Matriks B berordo 3 × 3, artinya memiliki 3 baris dan 3 kolom. Elemen matriks B diberikan oleh rumus $a_{ij} = -4i + 3j$ untuk setiap elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j.

i	j	$a_{ij} = -4i + 3j$
1	1	$-4(1) + 3(1) = -1$
1	2	$-4(1) + 3(2) = 2$
1	3	$-4(1) + 3(3) = 5$
2	1	$-4(2) + 3(1) = -5$
2	2	$-4(2) + 3(2) = -2$
2	3	$-4(2) + 3(3) = 1$
3	1	$-4(3) + 3(1) = -9$
3	2	$-4(3) + 3(2) = -6$
3	3	$-4(3) + 3(3) = -3$

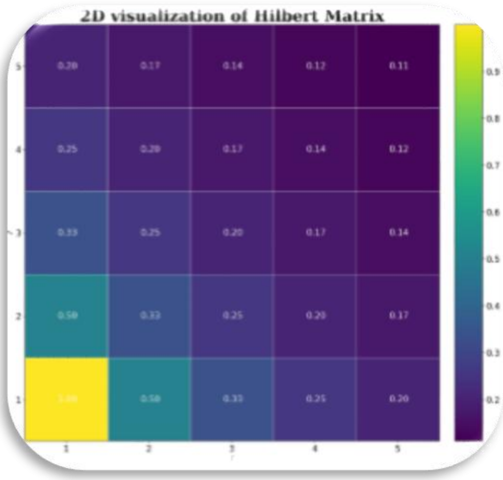
Jadi, matriks B adalah:

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -5 & -2 & 1 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

Pojok Matematika

Matriks Hilbert

- Matriks Hilbert adalah salah satu jenis matriks persegi yang terkenal dalam matematika, terutama dalam aljabar linear dan analisis numerik. Matriks ini dinamai berdasarkan matematikawan Jerman, David Hilbert, yang berkontribusi besar pada teori ruang vektor dan analisis fungsional. Matriks Hilbert memiliki elemen-elemen yang didefinisikan sebagai $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ di mana i dan j adalah indeks baris dan kolom masing-masing. Dengan kata lain, elemen pada posisi (i, j) dalam matriks Hilbert adalah kebalikan dari jumlah baris dan kolom dikurangi satu. Bentuk ini menghasilkan matriks yang simetris dan positif definit, tetapi juga sangat kondisional dalam konteks perhitungan numerik.
- Keistimewaan dari matriks Hilbert terletak pada sifatnya yang *ill-conditioned*, artinya matriks ini sangat sensitif terhadap perubahan kecil pada data masukan. Hal ini disebabkan oleh nilai determinan yang sangat kecil ketika ukuran matriks bertambah, sehingga solusi dari sistem persamaan linear yang melibatkan matriks Hilbert dapat mengalami error besar jika menggunakan metode numerik standar. Matriks ini sering digunakan dalam analisis kesalahan numerik untuk menguji kestabilan algoritma penyelesaian persamaan linear. Pada ukuran matriks yang lebih besar (misalnya, matriks Hilbert berukuran 10 × 10), metode inversi langsung dapat menghasilkan nilai yang tidak akurat karena pengaruh *round-off error*.



- Walaupun sulit ditangani dalam komputasi, matriks Hilbert tetap menjadi objek studi yang penting dalam matematika karena sifat analitisnya yang menarik. Matriks ini merupakan contoh dari matriks simetris positif definit, yang berarti semua nilai eigen dari matriks Hilbert adalah positif. Namun, nilai eigen tersebut juga menunjukkan penurunan yang cepat, sehingga semakin besar ukurannya, semakin kecil nilai eigen berikutnya. Studi mengenai matriks Hilbert tidak hanya menarik secara teoritis, tetapi juga memberikan wawasan mendalam mengenai batasan metode numerik dalam menangani sistem linear yang sangat sensitif. Karena karakteristiknya yang menantang, matriks Hilbert sering digunakan sebagai contoh ekstrem dalam kursus aljabar linear dan analisis numerik.

3. Persamaan Dua Matriks

Persamaan dua matriks terjadi ketika dua buah matriks dianggap sama atau ekuivalen. Dua matriks dikatakan sama jika:

1) memiliki ordo yang sama,
2) semua anggota yang bersesuaian juga sama.

Secara umum, jika A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ adalah dua matriks dengan ordo m × n, maka:

A = B jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i, j.

Perhatikan contoh berikut.

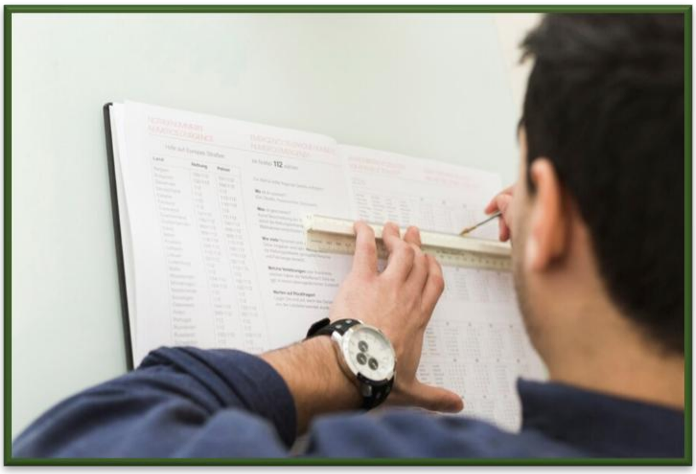
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

A = B karena ordo dan semua anggota yang bersesuaian sama.

Namun, jika:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

maka A ≠ C karena $a_{22} = 5 \neq 6 = c_{22}$.



Penerapan Matriks dalam Kehidupan – Freepik.com

Contoh Soal

1. Jika $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ ab & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$. Hitunglah nilai a + b.

Penyelesaian:

2a = −6 … (1)

ab = 15 … (2)

Dari persamaan (1) diperoleh:

2a = −6

a = −3

Substitusi a = −3 ke Persamaan (2).

ab = 15

↔ (−3) × b = 15

↔ b = 15 ÷ (−3)

↔ b = −5

Jadi, a = −3 dan b = −5 maka a + b = (−3) + (−5) = −8.

2. Diketahui matriks R = $\begin{pmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2 & 2c \\ 4 & 4-d \end{pmatrix}$ dan matriks S = $\begin{pmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & e \end{pmatrix}$. Jika R^T = S, hitunglah nilai a – b + c – d = …

Penyelesaian:

Transpos matriks R

$R^T = \begin{pmatrix} 2a-4 & d+2 & 4 \\ 3b & 2c & 4-d \end{pmatrix}$

$R^T = S$

$\begin{pmatrix} 2a-4 & d+2 & 4 \\ 3b & 2c & 4-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & e \end{pmatrix}$

2a − 4 = b − 5 … (1)

d + 2 = 3a − c … (2)

3b = 3 … (3)

2c = 6 … (4)

Dari persamaan (3) diperoleh:

3b = 3

b = 1

Dari persamaan (4) diperoleh:

2c = 6

c = 3

Substitusi b = 1 ke persamaan (1).

2a − 4 = b − 5 … (1)

2a − 4 = 1 − 5

2a = −4 + 4

2a = 0

a = 0

Substitusi a = 0 dan c = 3 ke persamaan (2).

d + 2 = 3a − c … (2)

d + 2 = 3(0) − 3

d = −3 − 2

d = −5

Jadi, nilai a – b + c − d = 0 − 1 + 3 − (−5) = 7.

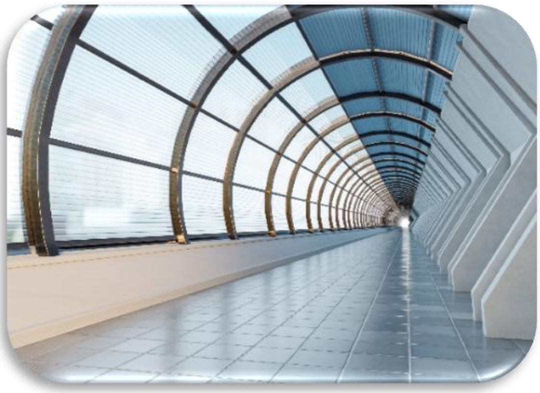
Pojok Matematika

Perspektif Gambar dalam Matriks

- Transformasi gambar merupakan salah satu aplikasi matriks yang penting dalam grafika komputer dan pengolahan citra. Dalam konteks ini, matriks digunakan untuk memanipulasi gambar atau objek dua dimensi maupun tiga dimensi. Transformasi yang paling umum melibatkan translasi (pergeseran), rotasi (perputaran), skalasi (perubahan ukuran), dan shearing (pergeseran bentuk). Setiap jenis transformasi dapat direpresentasikan oleh matriks transformasi yang memiliki bentuk khusus. Misalnya, rotasi pada bidang dua dimensi biasanya menggunakan matriks rotasi sebagai berikut:

  $$R\ (\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  Dengan menggunakan matriks ini, gambar dapat diputar sesuai sudut θ searah atau berlawanan dengan arah jarum jam. Matriks rotasi ini sering digunakan dalam aplikasi seperti desain grafis, animasi komputer, dan pemrosesan gambar digital.
- Dalam pemrosesan citra digital, transformasi menggunakan matriks sangat berguna untuk melakukan modifikasi bentuk dan orientasi gambar. Misalnya, pada pengeditan foto, rotasi digunakan untuk memperbaiki kemiringan, sementara translasi digunakan untuk menggeser posisi objek pada kanvas. Matriks skala digunakan untuk memperbesar atau memperkecil ukuran gambar tanpa mengubah proporsinya. Selain itu, efek perspektif dapat diperoleh melalui matriks transformasi perspektif, yang mengubah sudut pandang gambar sehingga tampak lebih realistis. Kombinasi dari beberapa transformasi ini dapat dilakukan dengan mengalikan matriks-matriks yang mewakili masing-masing operasi, sehingga hasil akhirnya merupakan gabungan dari semua perubahan tersebut.
- Selain dalam grafika komputer, transformasi gambar berbasis matriks juga digunakan dalam Computer Vision dan Augmented Reality (AR). Dalam aplikasi ini, kamera menangkap gambar dalam berbagai sudut dan posisi, yang kemudian ditransformasi agar dapat ditampilkan pada layar dengan perspektif yang tepat. Misalnya, pada aplikasi AR, objek virtual yang muncul di layar mengikuti perspektif kamera, sehingga tampak seolah berada di dunia nyata. Teknik ini dimungkinkan dengan menggunakan matriks transformasi yang menghitung perubahan posisi dan orientasi objek secara dinamis. Oleh karena itu, matriks memainkan peran penting dalam memanipulasi gambar dan menciptakan efek visual yang kompleks dan interaktif.



4. Operasi Matriks

Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua matriks hanya dapat dilakukan jika kedua matriks memiliki ordo yang sama. Operasi ini dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak pada kedua matriks tersebut.

Apabila terdapat matriks A = a_{ij} dan matriks B = b_{ij}, maka

A + B = C ↔ ordo A = ordo B

ordo C = ordo A = ordo B

Pada penjumlahan matriks berlaku sifat berikut:

- Komutatif A + B = B + A
- Asosiatif (P + Q) + R = P + (Q + R)

Apabila ordo A sembarang matriks m × n dan O matriks nol berordo m × n, berlaku:

$$\boxed{A + O = O + A}$$

Matriks nol dapat dikatakan sebagai elemen identitas penjumlahan matriks.

Contoh Soal

1. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ dan matriks B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Tentukan A + B.

   Penyelesaian:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 6+(-1) \\ 2+6 & (-5)+9 \\ (-3)+10 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui matriks P = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, Q = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, dan R = $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$. Tentukan:

   a. (P + Q) + R

   b. P + (Q + R)

   Penyelesaian:

   a. (P + Q) + R = $\begin{pmatrix} (3+(-2))+7 & (2+1)+8 \\ (1+6)+10 & (4+2)+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$

   b. P + (Q + R) = $\begin{pmatrix} 3+((-2)+7) & 2+(1+8) \\ 1+(6+10) & 4+(2+12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$

Pengurangan Matriks

Setiap matriks mempunyai lawan, maka dapat ditulis A + (−B) sebagai A − B. Dengan kata lain, matriks A dikurang matriks B didefiniiskan sebagai matriks A ditambah dengan lawan dari matriks B.

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Contoh Soal

1. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ dan matriks B = $\begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$. Hitunglah A − B.

   Penyelesaian:

   $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} -7 & 17 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$

2. Jika X merupakan matriks berordo 2 × 2, selesaikanlah persamaan berikut.

   $$X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Penyelesaian:

   $X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

   $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

   $\rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

3. Diketahui D = $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, E = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, dan F = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Tentukan:

   a. D − E − F

   b. D − (E − F)

   c. (D + E) − F

   Penyelesaian:

   a. $D - E - F = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

   $= \left[\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$

   b. $D - (E - F) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right]$

   $= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -15 \end{pmatrix}$

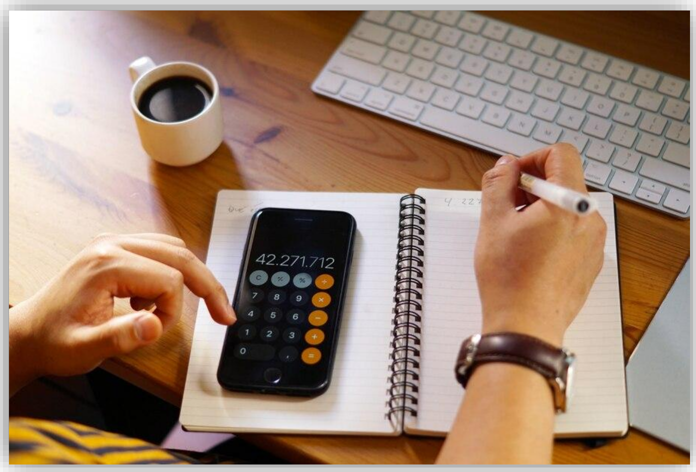
   $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

   c. $(D + E) - F = \left[\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -14 \end{pmatrix}$

Perkalian Bilangan Real dengan Matriks



Seseorang Menggunakan Kalkulator – Freepik.com

Dalam aljabar matriks, bilangan real umumnya disebut sebagai suatu skalar. Hasil kali skalar k dan matriks A dituliskan dengan notasi

$k \cdot A$

Matriks kA merupakan suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan hasil kali dari k dengan elemen-elemen matriks A.

Misalkan:

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

sehingga

$P + P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a+a & b+b \\ c+c & d+d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

Oleh karena P + P = 2P, maka:

$2P = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

Demikian pula P + P + P = 3P.

$3P = 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa apabila k merupakan bilangan real, maka:

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Contoh Soal

1. Diketahui matriks Y = $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, tentukan matriks 3Y dan −5Y.

   Penyelesaian:

   $3Y = 3\begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 3(-2) & 3(-1) & 3(9) \\ 3(3) & 3(2) & 3(-4) \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} -6 & -3 & 27 \\ 9 & 6 & -12 \end{pmatrix}$,

   $-5Y = \begin{pmatrix} (-5)(-2) & (-5)(-1) & (-5)(9) \\ (-5)(3) & (-5)(2) & (-5)(-4) \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 10 & 5 & -45 \\ -15 & -10 & 20 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks R = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ dan S = $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Tentukan bentuk paling sederhana matriks 4R − 2S.

   Penyelesaian:

   $4R - 2S = 4\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ -4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$

Perkalian Matriks

Perkalian dua matriks merupakan proses penjumlahan hasil kali yang diperoleh dengan mengalikan elemen-elemen pada baris suatu matriks dengan elemen-elemen pada kolom matriks lainnya. Jika matriks pertama disebut matriks A dan matriks kedua disebut matriks B, maka hasil kali dari matriks A dan B dinyatakan dengan notasi AB.

c. Syarat Perkalian Matriks

Secara umum, dua matriks A dan B dapat dikalikan jika matriks A memiliki ordo m × n dan matriks B memiliki ordo n × p. Hasil perkalian matriks A × B akan menghasilkan matriks dengan m × P.

Berikut dijelaskan proses perkalian matriks yang berordo 3 × 2 dan matriks berordo 2 × 2 yang akan menghasilkan matriks berordo 3 × 2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \times p) + (b \times r) & (a \times q) + (b \times s) \\ (c \times p) + (d \times r) & (c \times q) + (d \times s) \\ (e \times p) + (f \times r) & (e \times q) + (f \times s) \end{pmatrix}$$

Pada perkalian matriks, sifat komutatif umumnya tidak berlaku, yaitu AB ≠ BA. Istilah yang digunakan dalam aljabar, matriks perkalian AB adalah matriks B dikalikan dari kiri oleh matriks A dan perkalian BA adalah matriks B dikalikan dari kanan oleh matriks A.

d. Matriks Satuan (Identitas)

Perhatikan contoh perkalian berikut.

Jika matriks A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka:

$$AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & 0+b \\ c+0 & 0+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$IA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ 0+c & 0+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pada contoh di atas, ditunjukkan bahwa AI = IA dan hasil perkaliannya adalah matriks A. Hal serupa berlaku jika sembarang matriks berordo 2 × 2 dikalikan dengan matriks I_2 (matriks satuan berordo 2 × 2), hasil perkaliannya adalah matriks itu sendiri. Matriks I_2 tersebut dinamakan matriks satuan atau identitas perkalian yang berordo 2 × 2.

Contoh Soal

Selesaikan perkalian dua matriks berikut.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b \\ 2a+3b \end{pmatrix}$

b. $$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 \;\; -4)\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} & (5 \;\; -4)\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} & (5 \;\; -4)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (1 \;\; 6)\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} & (1 \;\; 6)\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} & (1 \;\; 6)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (-3 \;\; 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} & (-3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} & (-3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times (-1) + (-4) \times 7 & 5 \times 2 + (-4) \times (-4) & 5 \times 1 + (-4) \times 3 \\ 1 \times (-1) + 6 \times 7 & 1 \times 2 + 6 \times (-4) & 1 \times 1 + 6 \times 3 \\ (-3) \times (-1) + 2 \times 7 & (-3) \times 2 + 2 \times (-4) & (-3) \times 1 + 2 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -33 & 26 & -7 \\ 41 & -22 & 19 \\ 17 & -14 & 3 \end{pmatrix}$$

Pojok Matematika

Analisis Jaringan Sosial dengan Matriks

- Matriks adjacency merupakan alat yang sangat berguna dalam menganalisis jaringan sosial, khususnya dalam menggambarkan hubungan atau koneksi antarindividu. Dalam konteks media sosial, matriks ini digunakan untuk merepresentasikan hubungan pertemanan, interaksi, atau koneksi antar pengguna. Matriks adjacency berbentuk matriks persegi yang elemennya bernilai 1 jika ada hubungan langsung antara dua individu, dan 0 jika tidak ada hubungan. Misalnya, jika pengguna A dan B berteman di suatu platform, maka elemen pada baris A dan kolom B, serta baris B dan kolom A, akan bernilai 1. Jika tidak berteman, nilainya adalah 0. Matriks ini bersifat simetris jika hubungan dianggap timbal balik (misalnya, pertemanan), namun dapat menjadi matriks tak simetris jika hubungan bersifat satu arah (misalnya, mengikuti di Twitter).
- Dalam analisis jaringan sosial, matriks *adjacency* memudahkan untuk menghitung berbagai parameter jaringan, seperti derajat simpul, yaitu jumlah koneksi yang dimiliki oleh setiap pengguna. Matriks ini juga memungkinkan identifikasi komunitas atau kelompok pengguna yang saling terhubung lebih erat. Algoritma graf seperti *PageRank* dan *Clustering Coefficient* menggunakan matriks *adjacency* untuk mengukur pentingnya suatu simpul atau menemukan kelompok-kelompok kecil dalam jaringan besar. Misalnya, pada sebuah komunitas online, pengguna dengan nilai derajat tinggi dalam matriks *adjacency* dapat dianggap sebagai *influencer* atau pusat interaksi. Dengan teknik seperti analisis komponen terhubung, matriks ini dapat membantu memahami bagaimana informasi menyebar dalam jaringan sosial.
- Selain itu, matriks *adjacency* sangat bermanfaat dalam analisis sentralitas, yaitu menentukan pengguna mana yang paling berpengaruh atau memiliki akses luas dalam jaringan. Sentralitas derajat, misalnya, dihitung langsung dari jumlah 1 pada baris atau kolom tertentu dalam matriks. Di sisi lain, sentralitas antara dan sentralitas eigen memanfaatkan operasi matriks yang lebih kompleks untuk mengukur kekuatan pengaruh tidak langsung. Penggunaan matriks adjacency dalam media sosial tidak hanya terbatas pada analisis interaksi pengguna, tetapi juga dalam deteksi hoaks dan analisis sentimen, dimana pola hubungan antara akun dapat mengungkapkan jaringan penyebaran informasi palsu. Dengan demikian, pemanfaatan matriks *adjacency* dalam jaringan sosial memberikan wawasan yang lebih mendalam mengenai struktur dan dinamika interaksi antarindividu.

Rangkuman

- ▷ Matriks adalah susunan angka atau elemen yang disusun tanpa dimaksudkan untuk menghitung total dari angka-angka tersebut.
- ▷ Penulisan nama suatu matriks umumnya menggunakan huruf kapital. Jika suatu matriks A mempunyai baris sebanyak m dan kolom sebanyak n, ordo matriks A adalah m × n.
- ▷ Matriks-matriks khusus
  - Matriks kolom $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
  - Matriks baris $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$
  - Matriks nol $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ atau $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - Matriks persegi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
  - Matriks diagonal $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
  - Matriks skalar $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
  - Matriks identitas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Matriks segitiga atas A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ \mathbf{0} & 5 & 4 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$
  - Matriks segitiga bawah A = $\begin{pmatrix} 4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & -2 & \mathbf{0} \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
  - Matriks transpos jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka A^T = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
- ▷ Dua matriks dikatakan sama apabila:
  1) memiliki ordo yang sama,
  2) semua anggota yang bersesuaian juga sama.
- ▷ Dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ordo kedua matriks tersebut sama. Bentuk operasinya adalah dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang seletak pada kedua matriks tersebut.
- ▷ Untuk penjumlahan matriks, berlaku sifat:
  - Komutatif A + B = B + A
  - Asosiatif (P + Q) + R = P + (Q + R)
- ▷ Perkalian dua matriks adalah proses penjumlahan hasil kali yang diperoleh dari perkalian elemen-elemen pada baris matriks yang satu dengan elemen-elemen pada kolom matriks yang lain.

  Contoh: A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, AB = $\begin{pmatrix} (a \times p) + (b \times r) & (a \times q) + (b \times s) \\ (c \times p) + (d \times r) & (c \times q) + (d \times s) \\ (e \times p) + (f \times r) & (e \times q) + (f \times s) \end{pmatrix}$
- ▷ Dua buah matriks dapat dikalikan jika ordo kedua matriks memenuhi pernyataan berikut.

  $\underset{m \times n}{A} \quad \underset{\text{sama}}{\times} \quad \underset{n \times p}{B} \quad = \quad \underset{m \times p}{AB}$

Latihan Soal

1. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Jika a_{ij} menyatakan elemen matriks A pada baris ke-i dan kolom ke-j, nilai $a_{12} + 4_{21}$ = …

   a. 22
   b. 23
   c. 24
   d. 25
   e. 26

2. Diketahui matriks M = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a+b & 2 & 5 \\ 2b+6 & c-4 & -4 \end{pmatrix}$ merupakan matriks segitiga atas. Nilai dari $a^2 + 2bc$ = …

   a. 15
   b. 10
   c. −15
   d. −5
   e. −10

3. Ordo hasil perkalian matriks

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 10 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

   adalah ….

   a. 2 × 1
   b. 2 × 2
   c. 2 × 3
   d. 3 × 2
   e. 3 × 3

4. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$. Nilai dari 2a − b = …

   a. 6
   b. 10
   c. 14
   d. 16
   e. 18

5. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 2p & 2 & -3q \\ 4 & -1 & -4 \\ r & q & -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -p & -7 & q \\ -5 & 5 & r \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, dan C = $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Jika A + B = C, nilai dari p + q + r = …

   a. −6
   b. −3
   c. 0
   d. −1
   e. 1

6. Diketahui matriks P = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, nilai PQ = …

   a. $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$

7. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ R = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Matriks R yang memenuhi persamaan tersebut adalah …

a. R = $\begin{pmatrix} -28 & -6 \\ 65 & 14 \end{pmatrix}$
b. R = $\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ 65 & -14 \end{pmatrix}$
c. R = $\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -65 & 14 \end{pmatrix}$
d. R = $\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ 65 & 14 \end{pmatrix}$
e. R = $\begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 65 & 14 \end{pmatrix}$

8. Nilai x yang memenuhi persamaan matriks $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 33 & -12 \\ -20 & -16 \end{pmatrix}$ adalah …

a. 4
b. 2
c. 0
d. −4
e. −2

9. Diketahui matriks x = $\begin{pmatrix} a & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, Y = $\begin{pmatrix} 4 & a+b \\ b+c & 3 \end{pmatrix}$, dan Z = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 3 \end{pmatrix}$. Nilai c yang memenuhi P + Q = 3R adalah …

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

10. Jika $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$ = x$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$+ y$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nilai xy = …

a. −32
b. 26
c. −26
d. 36
e. −36

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 11 BAB 3

Referensi

Darmawan, R. (2017). Diagonalisasi Matriks Hilbert. *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science), 3*(2), 1–10.

Jannah, N. (2023). Analisis Jejaring Sosial Menggunakan Eigenvector Centrality pada Media Sosial. *Repository UIN Jakarta*.

Khatri, N., Dasgupta, A., Shen, Y., Zhong, X., & Shih, F. Y. (2022). Perspective transformation layer. *Proceedings of the 2022 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence (CSCI)*.

Noormandiri, B. K. (2023). *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

Pan, R., Purchase, H. C., Dwyer, T., & Chen, W. (2023). Extending adjacency matrices to 3D with triangles. *arXiv Preprint arXiv:2306.07588*.

Roopaei, H. (2020). *Norm of Hilbert operator on sequence spaces*. Journal of Inequalities and Applications, 2020(117).

Wang, Y. (2007). *Chinese Mathematics: A Concise History.* Oxford University Press.

Widodo, S. A. (2018). *Pembelajaran Matematika: Teori dan Praktik* (Edisi Revisi). PT Remaja Rosdakarya.

BAB 4
STATISTIKA REGRESI

Karakter Pelajar Pancasila

Kreatif, Benalar Kritis, Mandiri.

Kata Kunci: Diagram Pencar, Ekstrapolasi, Koefisien Determinasi, Interpolasi, Koefisien Korelasi Pearson, Regresi Linear.

Tujuan Pembelajaran: Menjelajahi Data Statistika

1. **Mendeskripsikan Data dalam Bentuk Diagram Pencar**
   - ▷ Menyusun diagram pencar berdasarkan dua set data kuantitatif untuk menampilkan distribusi dan pola hubungan antar variabel.
   - ▷ Mengidentifikasi jenis dan arah hubungan yang mungkin terjadi antara kedua variabel berdasarkan tampilan grafik tersebut.
2. **Menentukan dan Menafsirkan Persamaan Garis Regresi Linear**
   - ▷ Membuat dan menginterpretasikan persamaan garis regresi linear dari data yang tersedia.
   - ▷ Menginterpretasikan makna kemiringan (*slope*) dan intersep dalam kaitannya dengan hubungan antar variabel.
3. **Menggunakan Persamaan Garis Regresi Linear untuk Melakukan Prediksi Terhadap Data**

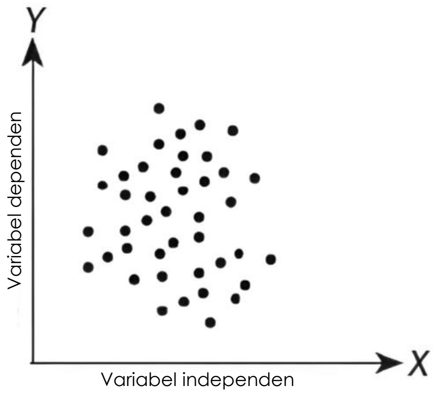
- ▷ Menerapkan interpolasi untuk memperkirakan nilai antara dua titik data berdasarkan garis regresi.
- ▷ Melakukan ekstrapolasi dengan hati-hati untuk memperkirakan nilai di luar jangkauan data yang tersedia.

4. Menghitung Koefisien Korelasi dan Koefisien Determinasi dalam Analisis Regresi

- ▷ Menggunakan rumus Pearson untuk memperoleh nilai koefisien korelasi.
- ▷ Menghitung koefisien determinasi sebagai ukuran seberapa baik model menjelaskan data.
- ▷ Menjelaskan hubungan kekuatan dan arah korelasi serta proporsi variasi data yang dapat dijelaskan oleh model regresi.

1. Diagram Pencar

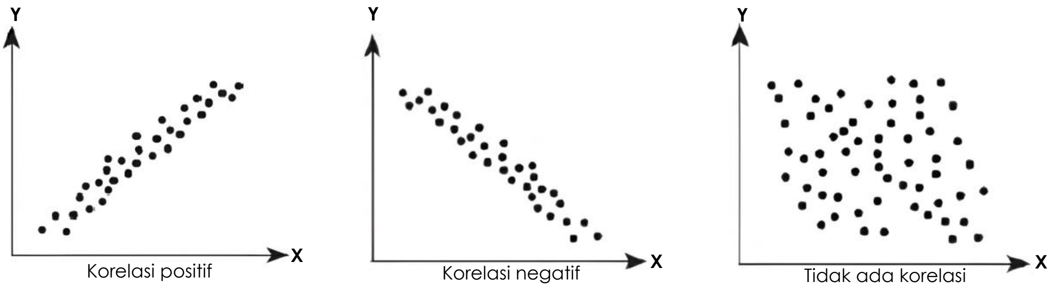
Diagram pencar atau *scatter plot* merupakan salah satu jenis grafik yang digunakan untuk menampilkan hubungan antara dua variabel kuantitatif. Pada diagram ini, setiap titik mewakili sepasang nilai dari dua variabel yang diamati. Variabel pertama adalah variabel independent (bebas) yang digambarkan pada sumbu X. Variabel independen merupakan variabel yang memengaruhi atau menyebabkan peurbahan pada variabel dependen. Variabel kedua adalah variabel dependen (terikat) yang digambarkan pada sumbu Y. Variabel dependen merupakan variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen. Perhatikan diagram pencar di samping.



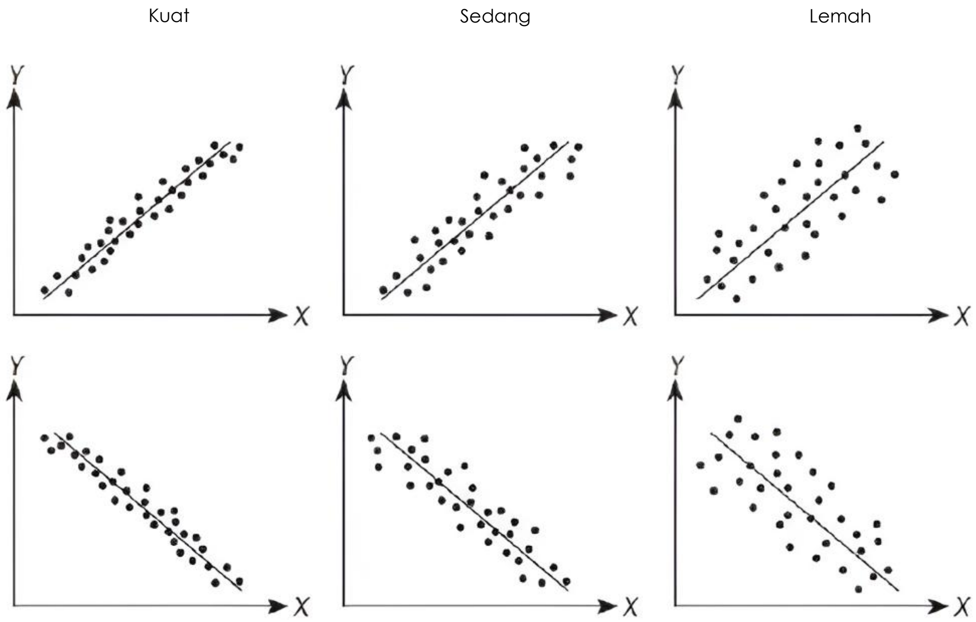
Berdasarkan diagram pencar, terdapat adanya tren hubungan linear, yaitu semakin besar nilai X, maka semakin besar pula. Jika titik-titik pada diagram pencar mendekati garis lurus, dapat dikatakan bahwa hubungan linear antara variabel X dan Y semakin kuat. Untuk mengukur kekuatan hubungan linear antara X dan Y, digunakan analisis korelasi. Berikut adalah langkah-langkah dalam melihat korelasi antara dua variabel:

▷ Mengamati tren data pada diagram pencar untuk menentukan jenis korelasi.

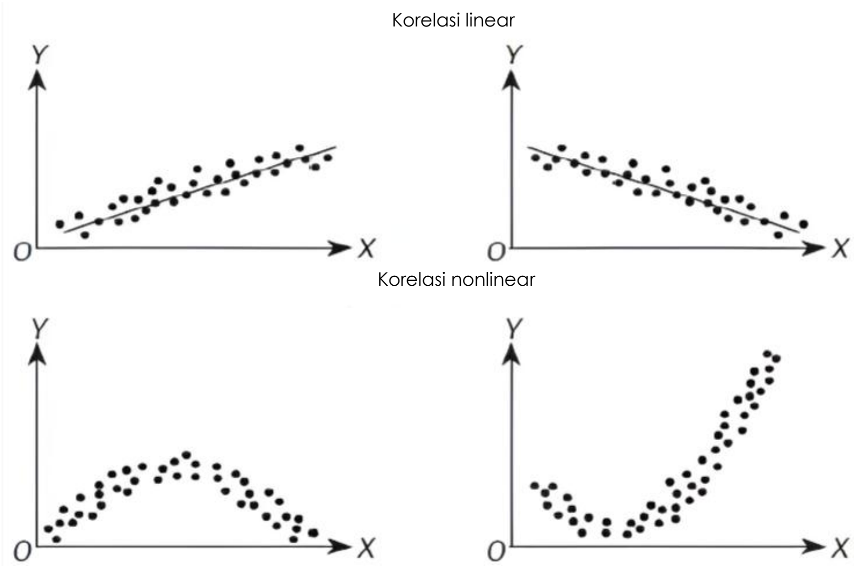
- Jika tren data menunjukkan peningkatan, maka terdapat hubungan positif atau **korelasi positif** antara kedua variabel, dimana peningkatan nilai variabel independen (X) diikuti oleh peningkatan nilai variabel dependen (Y).
- Jika tren data menunjukkan penurunan, maka terdapat hubungan negatif atau **korelasi negatif** antara kedua variabel, dimana peningkatan nilai variabel independen (X) menyebabkan penurunan nilai variabel dependen (Y).
- Jika titik-titik pada diagram tersebar secara acak tanpa pola yang jelas, artinya tidak ada korelasi antara kedua variabel.



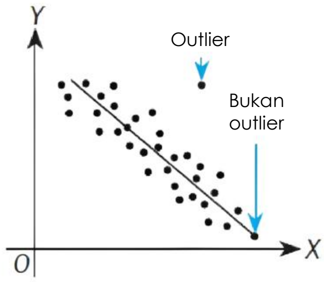
▷ Mengamati penyebaran titik-titik pada diagram pencar untuk menentukan kekuatan korelasi. Jika titik-titik semakin berdekatan, maka hubungan antar variabel semakin kuat. Sebaliknya, jika titik-titik semakin tersebar, maka hubungannya semakin lemah. Perhatikan gambar di bawah ini.



▷ Mengidentifikasi pola penyebaran titik-titik pada diagram pencar untuk mengetahui apakah hubungan tersebut bersifat linear atau nonlinear. Hubungan linear ditunjukkan oleh pola yang menyerupai garis lurus, sedangkan hubungan nonlinear ditandai dengan pola berbentuk lengkungan atau kurva.



▷ Mencari titik-titik yang berada jauh dari pola penyebaran pada diagram pencar. Titik-titik ini merupakan ***outlier*** atau pencilan, yaitu data yang terlalu menyimpang dari data lain dalam kumpulan tersebut. *Outlier* dapat muncul akibat kesalahan prosedur saat memasukkan data.



Korelasi antara dua variabel **tidak selalu** menunjukkan hubungan **sebab-akibat** pada keduanya. Apabila perubahan pada salah satu variabel mengakibatkan perubahan pada variabel lainnya, dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan sebab-akibat antara keduanya. Akan tetapi, apabila terdapat dua variabel yang memiliki korelasi, tidak dapat langsung disimpulkan bahwa terdapat hubungan sebab-akibat antara keduanya. Ada variabel lain yang perlu dipertimbangkan sebelum menyimpulkan adanya hubungan sebab-akibat.

Contoh Soal

Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai kandungan gula (gram) dan jumlah kalori dalam satu sajian dari 13 sampel merek sereal.

Ilustrasi Jenis Sereal – Freepik.com

Gula (gram)	4	15	12	11	8	6	14	2	7	14	20	3	13
Kalori	120	200	140	110	120	80	170	100	130	190	190	110	120

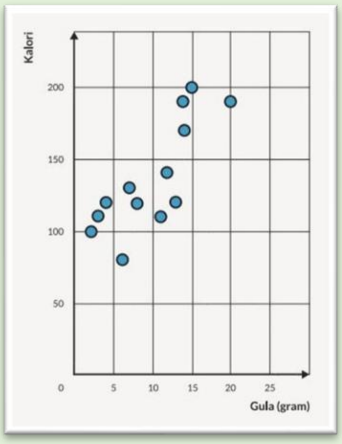
a. Gambarkan diagram pencar atau diagram scatter dari data di atas.

b. Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?

c. Kesimpulan seperti apa yang dapat diambil mengenai hubungan antara gula (gram) dan jumlah kalori?

Penyelesaian:

a. Data tersebut membentuk pola pada diagram pencar sebagai berikut.

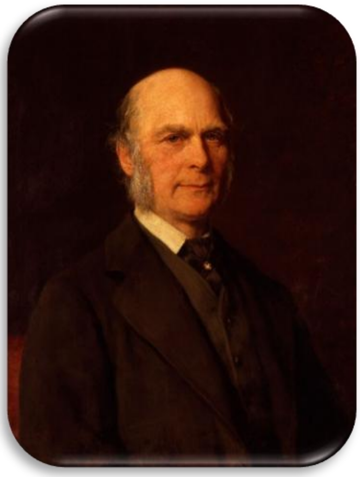


b. Titik-titik mempunyai kecenderungan semakin naik ke atas jika dilihat dari kiri bawah ke kanan atas.

c. Oleh karena garis tersebut memiliki kemiringan positif, maka diagram tersebut menunjukkan hubungan positif antara kandungan gula dan jumlah kalori. Artinya, semakin tinggi kandungan gula maka semakin tinggi kalorinya.

Pojok Matematika

Sejarah Diagram Pencar



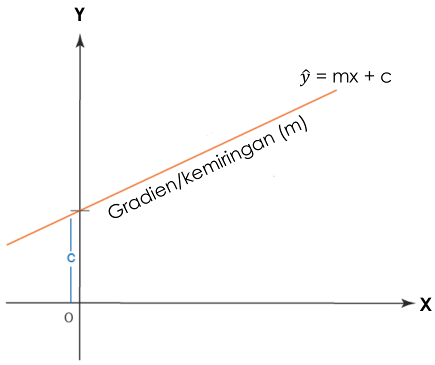
- Diagram pencar atau *scatter plot* pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan Inggris bernama Sir Francis Galton pada akhir abad ke-19. Galton, yang dikenal sebagai pionir dalam bidang statistik dan genetika, menggunakan *scatter plot* untuk mempelajari korelasi antara tinggi badan orang tua dan anak. Pada saat itu, Galton mencoba menemukan hubungan antara dua variabel secara visual dengan memetakan pasangan data pada grafik. Dari sinilah konsep dasar *scatter plot* sebagai alat visualisasi data korelasi mulai berkembang.
- Pada perkembangan selanjutnya, *scatter plot* semakin populer di kalangan ahli statistik karena kemampuannya menampilkan hubungan antara dua variabel secara sederhana. *Scatter plot* menjadi alat penting dalam analisis regresi linear, dimana garis terbaik (*line of best fit*) digunakan untuk memperkirakan hubungan linier antara variabel bebas dan terikat. Selain itu, scatter plot juga digunakan untuk mendeteksi pola, tren, dan adanya *outlier* yang bisa mempengaruhi hasil analisis. Seiring berjalannya waktu, *scatter plot* mulai diterapkan dalam berbagai bidang seperti ekonomi, sains, dan teknik.
- Hingga saat ini, *scatter plot* masih dianggap sebagai salah satu metode visualisasi data paling efektif dalam statistika. Berkat sifatnya yang sederhana namun informatif, *scatter plot* mampu memberikan gambaran cepat mengenai ada atau tidaknya hubungan antara dua variabel. Dalam dunia modern, *scatter plot* tidak hanya dibuat secara manual tetapi juga melalui software statistik seperti *Excel*, R, dan *Python*, sehingga proses analisis data menjadi lebih mudah dan cepat. Dengan warisan inovatif dari Sir Francis Galton, *scatter plot* terus digunakan untuk menyederhanakan pemahaman data kompleks hingga saat ini.

2. Regresi Linear

Grafik Visualisasi Regresi – Freepik.com

Garis Regresi atau Garis *Best-Fit*

Titik-titik pada diagram pencar membentuk pola yang menyerupai garis lurus. Apabila diagram pencar menunjukkan adanya korelasi antara dua variabel, dapat dilakukan penarikan garis dari titik-titik pada diagram tersebut. Di antara semua garis yang mungkin ditarik, terdapat satu garis yang paling sesuai dalam menggambarkan hubungan antara kedua variabel. Garis tersebut dikenal sebagai **garis regresi** atau **garis *best-fit***. Persamaan garis regresi sederhana umumnya dituliskan dalam bentuk umum berikut ini.



$$\hat{y} = mx + c$$

dengan $\hat{y}$ = nilai variabel dependen yang diprediksikan

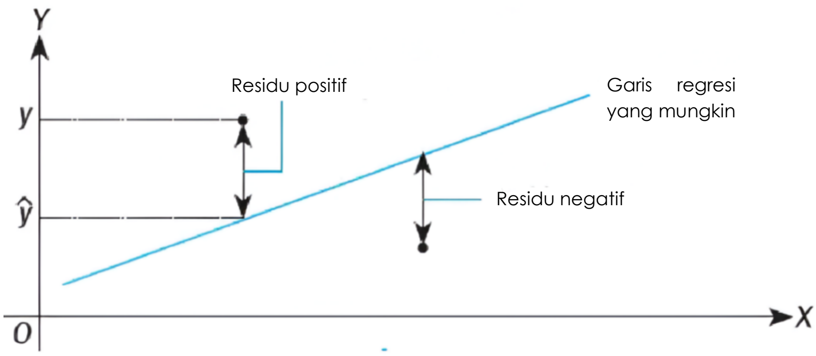
x = nilai variabel independent

m = koefisien regresi (gradien garis regresi)

c = konstanta (nilai $\hat{y}$ jika x = 0)

Metode Kuadrat Terkecil

Salah satu metode yang digunakan dalam penentuan garis regresi adalah metode kuadrat terkecil. Prinsip dasar dari metode ini adalah meminimalkan jumlah kuadrat residu. **Residu** didefinisikan sebagai jarak vertikal antara titik data dengan garis regresi.



Nilai dari residu adalah sebagai berikut.

$$\text{Residu } (\varepsilon) = y - \hat{y}$$

dengan y = nilai variabel dependen yang diamati

$\hat{y}$ = nilai variabel dependen yang diprediksi

Untuk memperoleh garis regresi yang optimal, diperlukan upaya meminimalkan jumlah residu. Namun, karena residu dapat memiliki nilai positif maupun negatif, penjumlahan residu dapat menghasilkan nilai nol. Padahal, kenyataannya terdapat beberapa residu yang memiliki jarak cukup jauh dari garis regresi. Oleh karena itu, untuk mengatasi permasalahan tersebut, dilakukan pengkuadratan terhadap setiap residu.

Jumlah kuadrat dari residu adalah sebagai berikut,

$SS = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + {\varepsilon_3}^2 + {\varepsilon_4}^2 + \ldots + {\varepsilon_n}^2$

$= \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_1}^2$

$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - c)^2$

Proses meminimalkan jumlah kuadrat residu dapat dilakukan melalui teknik diferensiasi. Meskipun demikian, prosedur diferensiasi tidak akan dijelaskan secara rinci karena memerlukan pemahaman Kalkulus Lanjutan yang umumnya dipelajari pada jenjang pendidikan universitas. Hasil dari proses diferensiasi tersebut akan menghasilkan estimasi nilai m dan c pada persamaan garis regresi, sehingga diperoleh bentuk persamaan garis regresi sebagai berikut.

$$\hat{y} - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{{s_x}^2}(x - \bar{x})$$

dengan:

$\bar{x}$ = rata-rata nilai x

$\bar{y}$ = rata-rata nilai y

s_{xy} = kovariansi dari x dan y

s_x = standar deviasi dari x

$$s_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} \text{ atau } s_{xy} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} \text{ atau } s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Dengan menggunakan rumus jumlah kuadrat selisih, diperoleh:

$$\hat{y} - \bar{y} = \frac{SS_{xy}}{SS_{xy}}(x - \bar{x})$$

dimana:

SS_{xy} = jumlah perkalian antara selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya dan variabel dependen y terhadap rata-ratanya

SS_{xx} = jumlah kuadrat selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya

$$SS_{xy} = \sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} \text{ atau } SS_{xy} = \sum xy - n\bar{x}\bar{y}$$

$$SS_{xx} = \sum(x-\bar{x})^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \text{ atau } SS_{xx} = \sum x^2 - n\bar{x}^2$$

Contoh Soal

Tabel berikut menunjukkan data nilai ujian tengah semester (x) dan ujian akhir semester (y) pada mata pelajaran Sastra Inggris dari 9 orang siswa kelas XI Bahasa.

X	77	50	71	72	81	94	96	99	67
Y	82	66	78	34	47	85	99	99	68

Tentukan persamaan garis regresi yang menunjukkan hubungan antara ujian tengah semester dan ujian akhir semester.

Penyelesaian:

Diketahui: variabel independen (x) adalah ujian tengah semester

variabel dependen (y) adalah ujian akhir semester

Perhatikan tabel berikut.

x	y	xy	x^2
77	82	6.314	5.929
50	66	3.300	2.500
71	78	5.538	5.041
72	34	2.448	5.184
81	47	3.807	6.561
94	85	7.990	8.836
96	99	9.504	9.216
99	99	9.801	9.801
67	68	4.556	4.489
$\sum x$ = 707	**$\sum y$ = 658**	**$\sum xy$ = 53.258**	**$\sum x^2$ = 57.557**

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{707}{9} = 78{,}56$

$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{658}{9} = 73{,}11$

Menggunakan rumus kuadrat selisih, diperoleh:

$SS_{xy} = \sum xy - n\bar{x}\bar{y}$

$= 53.258 - 9 \times 78{,}56 \times 73{,}11$

$= 53.258 – 51.614,19$

$= 1.568,44$

$SS_{xx} = \sum x^2 - n\bar{x}^2$

$= 57.557 - 9 \times 78,44^2$

$= 53.224 – 55.371,06$

$= 2.018,22$

Persamaan garis regresi:

$$\hat{y} - \bar{y} = \frac{SS_{xy}}{SS_{xy}}(x - \bar{x})$$

$\hat{y} – 73,11 = \frac{1.568,44}{2.018,22}$ (x – 78,56)

$\hat{y}$ – 73,11 = 0,777 (x – 78,56)

$\hat{y}$ – 73,11 = 0,777x – 61,041

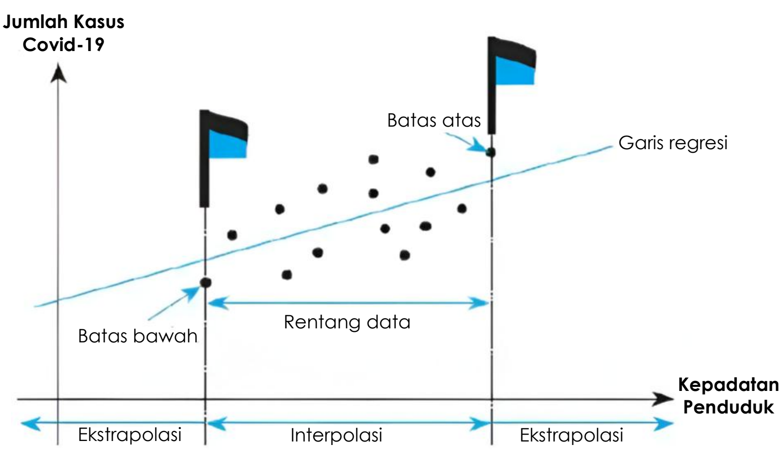
$\hat{y}$ = 0,777x – 61,041 + 73,11

$\hat{y}$ = 0,777x + 12,06

Jadi, persamaan garis regresi yang menunjukkan hubungan antara nilai ujian tengah semester dan ujian akhir semester adalah $\hat{y}$ = 0,777x + 12,06.

Interpolasi dan Ekstrapolasi

Garis regresi dapat digunakan untuk memprediksi data yang belum diketahui. Perhatikan diagram berikut.



Penggunaan garis regresi untuk memprediksi nilai yang berada didalam rentang data disebut **interpolasi**, sedangkan penggunaan garis regresi untuk memprediksi nilai yang berada di luar rentang data disebut **ekstrapolasi**.

Keakuratan interpolasi sangat bergantung pada linearitas data asli. Hal tersebut ini dapat diukur dengan menghitung koefisien korelasi serta memastikan bahwa data tersebar secara acak di sekitar garis regresi. Berbeda dengan interpolasi, keakuratan ekstrapolasi tidak hanya ditentukan oleh linearitas data asli, tetapi juga memerlukan asumsi bahwa hubungan linear tetap berlaku meskipun di luar rentang data. Validitas asumsi tersebut sangat bergantung pada konteks atau situasi yang sedang diteliti.

Contoh Soal

Seorang siswa sedang menyelidiki hubungan antara usia sebuah mobil bekas dengan harganya. Berikut merupakan data yang berhasil ia dapatkan.

Umur Mobil (tahun)	1	2	3	4	5
Harga Mobil (juta rupiah)	210	180	170	140	110

a. Tentukan persamaan garis regresi dari data tersebut.

b. Tentukan prediksi harga mobil bekas jika sudah berusia 6 tahun.

Penyelesaian:

a. Diketahui:

variabel independen (x) adalah umur mobil (t)

variabel dependen (y) adalah harga mobil bekas dalam juta rupiah (P)

Perhatikan tabel berikut.

x	y	xy	x^2
1	210	210	1
2	180	360	4
3	170	510	9
4	140	560	16
5	110	550	25
∑x = 15	**∑y = 810**	**∑xy = 2.190**	**$\sum x^2 = 55$**

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{5} = 3$

$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{810}{5} = 162$

Menggunakan rumus kuadrat selisih, diperoleh:

$SS_{xy} = \sum xy - n\bar{x}\bar{y}$

$= 2.190 - 5 \times 3 \times 162$

$= 2.190 - 2.430$

$= -240$

$SS_{xx} = \sum x^2 - n\bar{x}^2$

$= 55 - 9 \times 3^2$

$= 55 - 45$

$= 10$

Persamaan garis regresi:

$$\hat{y} - \bar{y} = \frac{SS_{xy}}{SS_{xy}}(x - \bar{x})$$

$\hat{y} - 162 = \frac{-240}{10}(x - 3)$

$\hat{y} - 162 = -24\,(x - 3)$

$\hat{y} - 162 = -24x + 72$

$\hat{y} = -24x + 72 + 73{,}11$

$\hat{y} = -24x + 234$

$\hat{y} = 234 - 24x$

$P = 234 - 24t$

Jadi, persamaan garis regresi yang menunjukkan hubungan antara umur mobil dan harga mobil adalah P = 234 − 24t.

b. Nilai yang menunjukkan t = 6

$P = 234 - 24t$

$P = 234 - 24(6)$

$P = 234 - 144$

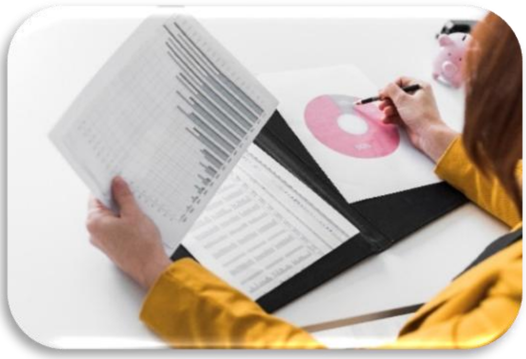
$P = 90$

Jadi, prediksi harga mobil bekas setelah 6 tahun adalah Rp90.000.000,00.

Pojok Matematika

Tidak Semua Data Dapat Diregresikan

- Regresi membutuhkan syarat dan asumsi tertentu agar hasilnya valid. Regresi linear, misalnya, mengasumsikan bahwa hubungan antara variabel bebas dan variabel terikat bersifat linear. Jika data menunjukkan pola yang melengkung atau tidak beraturan, seperti pada data eksponensial atau logaritmik, model regresi linear tidak akan menghasilkan prediksi yang akurat. Selain itu, data juga harus memenuhi asumsi kenormalan, artinya distribusi residu (selisih antara nilai aktual dan nilai prediksi) harus mengikuti distribusi normal. Jika data tidak memenuhi asumsi ini, metode regresi lain mungkin lebih sesuai, seperti regresi non-linear atau regresi logistik.
- Data yang mengandung *outlier* atau pencilan juga sulit diregresikan dengan akurat. *Outlier* adalah titik data yang secara signifikan berbeda dari mayoritas data lainnya, dan keberadaannya dapat menarik garis regresi menjauh dari pola sebenarnya. Misalnya, jika ada satu data penjualan yang sangat tinggi karena promosi besar-besaran, memasukkannya dalam analisis regresi bisa menyebabkan hasil yang bias. Oleh karena itu, sebelum melakukan regresi, analisis eksplorasi data (EDA) perlu dilakukan untuk mendeteksi dan menangani *outlier*. Teknik seperti *robust regression* dapat digunakan untuk mengurangi dampak *outlier* pada model.



- Selain itu, regresi juga tidak cocok jika variabel bebas memiliki korelasi tinggi satu sama lain, kondisi yang dikenal sebagai multikolinearitas. Misalnya, dalam analisis ekonomi, variabel pendapatan dan pengeluaran bulanan mungkin sangat berkorelasi. Jika digunakan bersamaan dalam model regresi, multikolinearitas dapat menyebabkan ketidakstabilan dalam estimasi parameter. Akibatnya, interpretasi koefisien menjadi sulit dan tidak akurat. Untuk mengatasi masalah ini, analisis korelasi terlebih dahulu diperlukan, atau bisa juga diterapkan teknik seperti *Principal Component Analysis (PCA)* untuk mengurangi multikolinearitas. Dengan mempertimbangkan syarat-syarat ini, regresi dapat diterapkan secara tepat dan menghasilkan prediksi yang dapat diandalkan.

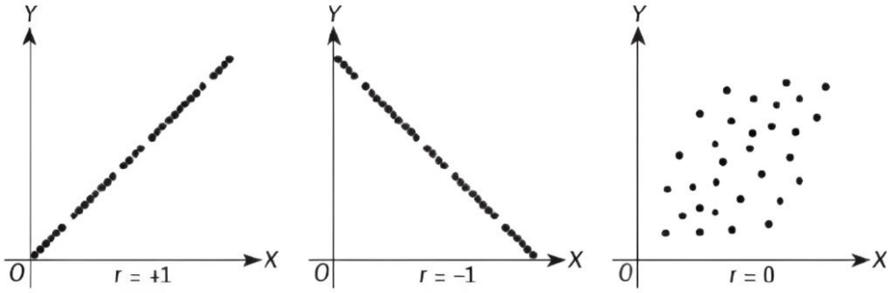
3. Analisis Korelasi

Prediksi Harga Saham sebagai Penerapan Regresi – Freepik.com

Koefisien Korelasi

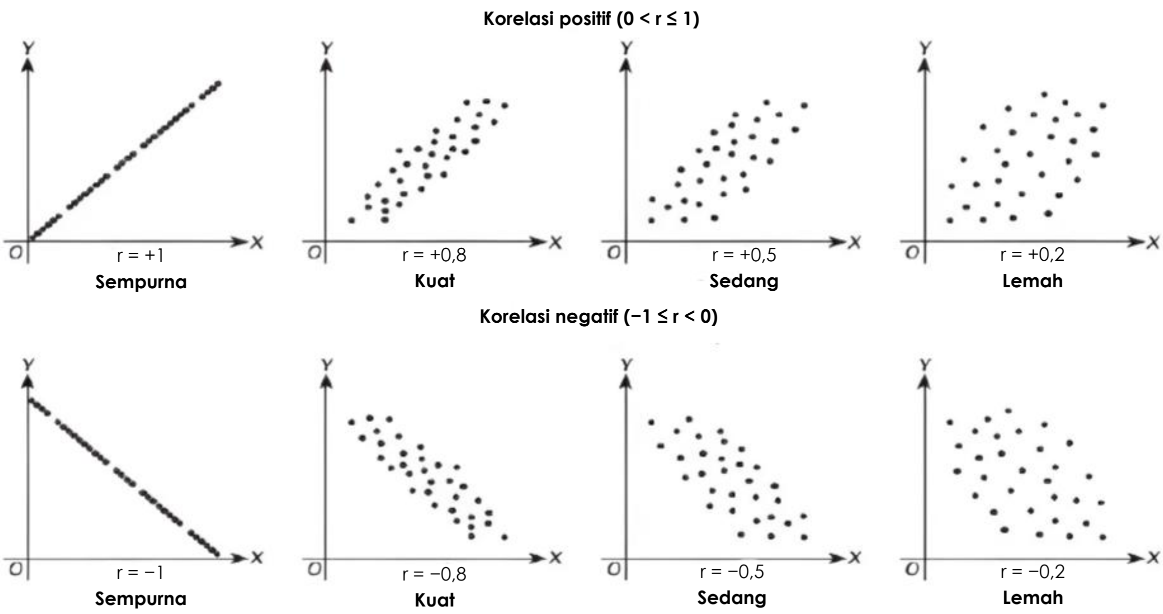
Koefisien korelasi merupakan sebuah nilai yang digunakan untuk mengukur dan menggambarkan kekuatan hubungan antara dua variabel serta memberikan informasi mengenai arah hubungan tersebut. Nilai koefisien korelasi (r) berada dalam rentang −1 hingga 1, ditulis sebagai $-1 \le r \le 1$. Kekuatan hubungan ditunjukkan oleh besarnya nilai koefisien korelasi, sementara arah hubungan ditentukan oleh tanda positif (+) atau negatif (−).

Nilai koefisien korelasi $r = \pm 1$ menunjukkan bahwa terdapat hubungan sempurna antara dua variabel. Tanda positif (+) menggambarkan korelasi positif fan tanda negatif (−) menggambarkan korelasi negatif. Nilai $r = 0$ menunjukkan tidak terdapat hubungan antara dua variabel, artinya tidak ada korelasi. Perhatikan diagram pencar berikut.



Korelasi positif sempurna — Korelasi negatif sempurna — Tidak ada korelasi

Nilai koefisien korelasi yang berada pada rentang $-1 \le r < 0$ dan $0 < r \le 1$ menunjukkan adanya berbagai tingkat kekuatan hubungan antara dua variabel. Perhatikan diagram pencar berikut.



Korelasi dianggap semakin kuat apabila nilai r mendekati +1 atau −1, sedangkan korelasi dianggap semakin lemah apabila nilai r mendekati 0.

Koefisien Korelasi Pearson

Koefisien Korelasi Pearson adalah metode paling umum yang digunakan untuk mengukur kekuatan dan arah hubungan linear antara dua variabel kuantitatif. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Karl Pearson pada tahun 1900 dan sering disebut sebagai korelasi *Product Moment*. Koefisien korelasi Pearson (r) untuk menggambarkan tingkat hubungan antara variabel independen X dan variabel dependen Y adalah sebagai berikut.

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \text{ atau } r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} SS_{yy}}}$$

Berdasarkan konsep koefisien korelasi Pearson tersebut, dapat diturunkan rumus sebagai berikut.

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}} \text{ atau } r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$$

Contoh Soal

Seorang peneliti melakukan penelitian dengan mengukur massa gula (dalam gram) yang terbentuk pada beberapa suhu (dalam derajat Celsius). Data hasil pengukurannya diberikan sebagai berikut.

Suhu	1,0	1,1	1,2	1,3
Massa Gula	8,1	7,8	8,5	9,8

Tentukan tingkat korelasi antara suhu massa gula sesuai dengan data tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan:

x = suhu

y = massa gula

Perhatikan tabel berikut.

x	y	xy	x^2	y^2
1	8,1	8,1	1	65,61
1,1	7,8	8,58	1,21	60,84
1,2	8,5	10,2	1,44	72,25
1,3	9,8	12,74	1,69	96,04
$\sum x = 4{,}6$	$\sum y = 34{,}2$	$\sum xy = 39{,}62$	$\sum x^2 = 5{,}34$	$\sum y^2 = 294{,}74$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{4{,}6}{4} = 1{,}15$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{34{,}2}{4} = 8{,}55$$

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$$

$$r = \frac{39{,}62 - (4)(1{,}15)(8{,}55)}{\sqrt{5{,}34 - (4)(1{,}15)^2}\sqrt{294{,}74 - (4)(8{,}55)^2}}$$

$$r = \frac{0{,}23}{\sqrt{5{,}34 - 5{,}29}\sqrt{294{,}74 - 292{,}41}}$$

$$r = \frac{0{,}23}{\sqrt{0{,}05}\sqrt{2{,}33}}$$

$r \approx 0{,}85$

Nilai koefisien korelasi mendekati 1, artinya terdapat korelasi positif yang kuat antara suhu dan massa gula. Kenaikan suhu cenderung disertai peningkatan massa gula.

Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi digunakan untuk memprediksi serta mengukur seberapa besar pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen. Koefisien determinasi (r^2) merupakan hasil kuadrat dari koefisien korelasi (r). Tingkat korelasi berdasarkan nilai koefisien determinasi adalah sebagai berikut.

Tabel Tingkat korelasi berdasarkan nilai koefisien determinasi

Nilai Koefisien Determinasi	Tingkat Korelasi
$r^2 = 0$	tidak ada korelasi
$0 < r^2 < 0{,}25$	sangat lemah
$0{,}25 \leq r^2 < 0{,}50$	lemah
$0{,}50 \leq r^2 < 0{,}75$	sedang
$0{,}75 \leq r^2 < 0{,}90$	kuat
$0{,}90 \leq r^2 < 1$	sangat kuat
$r^2 = 1$	sempurna

Nilai koefisien determinasi memiliki rentang antara $0 \leq r \leq 1$ dan umumnya dinyatakan dalam bentuk persentase (%) untuk menunjukkan besarnya pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen. Koefisien determinasi dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\boxed{\text{Koefisien determinasi} = r^2 \times 100\%}$$

Contoh Soal

Seorang dosen pengampu mata kuliah Statistika meminta 8 orang mahasiswa yang dipilihnya secara acak untuk mencatat lamanya waktu belajar (dalam jam) yang diluangkan setiap minggu untuk mempelajari mata kuliah Statistika secara mandiri. Pencatatan dilakukan sejak awal semester hingga menjelang ujian tengah semester (UTS). Kemudian, nilai UTS dikumpulkan untuk dianalisis lebih lanjut.Data yang diperoleh sebagai berikut.

Waktu Belajar	10	15	12	20	8	16	14	22
Nilai UTS	92	81	84	74	85	80	84	80

Bagaimana hasil penelitian tersebut? Jelaskan berdasarkan nilai koefisien determinasi dari data tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan:

x = waktu belajar

y = nilai UTS

Perhatikan tabel berikut.

x	y	xy	x^2	y^2
10	92	920	100	8.464
15	81	1.215	225	6.561
12	84	1.008	144	7.056
20	74	1.480	400	5.476
8	85	680	64	7.225
16	80	1.280	256	6.400
14	84	1.176	196	7.056
22	80	1,760	484	6.400
$\sum x$ = 117	**$\sum y$ = 660**	**$\sum xy$ = 9.519**	**$\sum x^2$ = 1.869**	**$\sum y^2$ = 54.638**

n = 8

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{117}{8} = 14{,}625$

$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{660}{8} = 82{,}5$

$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$

$r = \frac{9.519 - (8)(14{,}625)(82{,}5)}{\sqrt{1.869 - (8)(14{,}625)^2}\sqrt{54.638 - (8)(82{,}5)^2}}$

$r = \frac{0{,}23}{\sqrt{1.869 - 1.711{,}125}\sqrt{54.638 - 54.450}}$

$r = \frac{-133{,}5}{\sqrt{157{,}875}\sqrt{188}}$

$r \approx -0{,}7749$

$r^2 = (-0{,}7749)^2 \approx 0{,}6005$

Koefisien determinasi = $r^2 \times 100\%$

= $0{,}6005 \times 100\%$

= 60,05%

Nilai koefisien korelasi determinasi 60,05% menunjukkan bahwa waktu belajar cukup berpengaruh besar terhadap nilai UTS siswa, sementara sisanya sebesar 39,95% dijelaskan oleh faktor lain.

Pojok Matematika

Rekomendasi Film di Netflix dengan Regresi

- Netflix memanfaatkan teknik regresi sebagai bagian dari algoritma rekomendasinya untuk memprediksi film atau serial apa yang akan disukai oleh pengguna. Dengan jumlah pengguna yang mencapai jutaan dan katalog yang sangat luas, Netflix membutuhkan metode yang efisien untuk menganalisis data perilaku pengguna. Data-data ini mencakup film yang ditonton sebelumnya, rating yang diberikan, genre yang sering dipilih, hingga waktu menonton. Teknik regresi linear digunakan untuk mencari hubungan antara variabel-variabel tersebut dan preferensi pengguna. Dengan mempelajari pola-pola dalam data historis ini, Netflix dapat menghasilkan rekomendasi yang lebih akurat dan relevan.
- Algoritma rekomendasi Netflix tidak hanya bergantung pada satu metode, tetapi regresi memainkan peran penting dalam memperkirakan rating yang mungkin diberikan pengguna pada suatu film. Misalnya, regresi linear sederhana dapat digunakan untuk menghitung hubungan antara genre film dengan rating yang diberikan. Jika seorang pengguna sering memberikan rating tinggi pada film bergenre drama dan kriminal, model regresi akan memprediksi bahwa film baru dengan genre serupa juga akan disukai. Hasil prediksi ini kemudian digunakan sebagai dasar dalam menampilkan rekomendasi pada halaman beranda pengguna.
- Selain memperkirakan *rating*, regresi juga membantu dalam memahami faktor-faktor apa saja yang paling memengaruhi pilihan tontonan. Misalnya, hasil regresi dapat menunjukkan bahwa durasi film kurang memengaruhi pengguna dibandingkan dengan genre atau aktor yang membintangi film tersebut. Dengan pemahaman ini, algoritma rekomendasi dapat lebih terfokus pada variabel yang signifikan dalam memprediksi kesukaan pengguna. Selain regresi linear, Netflix juga menggabungkan teknik *matrix factorization* dan *collaborative filtering* untuk membuat prediksi yang lebih kompleks dan personal. Melalui kombinasi berbagai teknik ini, Netflix berhasil memberikan pengalaman menonton yang semakin disesuaikan dengan preferensi pribadi pengguna.

4. Aplikasi dalam Statistika

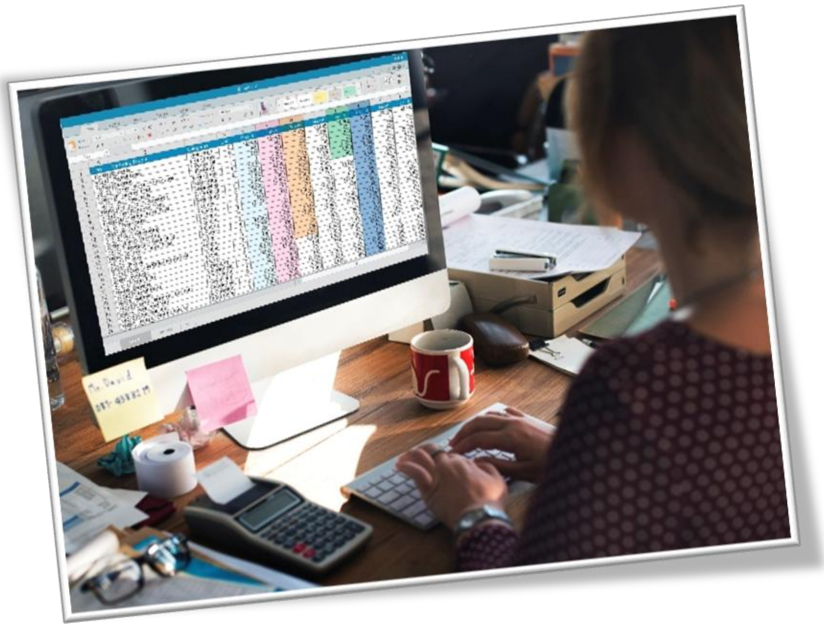
Microsoft Excel merupakan salah satu perangkat lunak yang paling mudah diakses untuk melakukan analisis regresi dan korelasi. Banyak praktisi, pelajar, maupun profesional menggunakan *Excel* untuk memahami hubungan antara dua variabel melalui data yang dikumpulkan.

Dalam analisis statistik, langkah pertama yang umum dilakukan adalah menyajikan data dalam bentuk diagram pencar. Diagram ini digunakan untuk memvisualisasikan pola hubungan antara dua variabel kuantitatif. *Excel* memungkinkan pengguna menyusun data dalam dua kolom dan mengubahnya menjadi grafik *scatter plot* yang memperlihatkan sebaran titik-titik data.

Setelah pola data divisualisasikan, analisis dapat dilanjutkan dengan menambahkan garis regresi linear atau garis best-fit ke dalam grafik tersebut. *Excel* secara otomatis dapat menampilkan persamaan garis regresi, biasanya dalam bentuk y = a + bx. Serta nilai koefisien determinasi (r^2) yang menunjukkan seberapa baik model menjelaskan data.

Selain itu, untuk mengukur kekuatan dan arah hubungan linear antara dua variabel, *Excel* menyediakan fungsi untuk menghitung koefisien korelasi Pearson. Nilai ini membantu menilai apakah dua variabel memiliki hubungan positif, negatif, atau tidak berkorelasi sama sekali.

Penggunaan *Excel* dalam analisis ini memberi keuntungan karena hasilnya langsung terlihat secara visual dan mudah diinterpretasikan. Oleh karena itu, *Excel* bukan hanya alat hitung, tapi juga alat bantu analisis dan pengambilan keputusan berbasis data yang sangat efektif.



Ilustasi Analsis Data dengan Excel – Freepik.com

Pojok Matematika

Dinamika Harga Tiket Pesawat

▷ Harga tiket pesawat sering kali berubah-ubah dalam waktu singkat, dan hal ini bukanlah kebetulan semata. Fluktuasi harga tiket dipengaruhi oleh banyak faktor seperti permintaan penumpang, waktu pembelian, jarak penerbangan, musim liburan, dan promosi maskapai. Untuk memahami pola perubahan harga ini, regresi ekonometrik dapat digunakan sebagai alat analisis yang kuat. Dengan menggunakan model regresi, para ekonom dapat menentukan variabel mana yang paling berpengaruh terhadap perubahan harga tiket.

▷ Misalnya, model regresi linear dapat menghubungkan harga tiket pesawat dengan variabel bebas seperti jumlah kursi yang tersisa, jarak keberangkatan, dan periode perjalanan (weekday vs. weekend). Model ini akan menghasilkan persamaan yang menggambarkan hubungan antara variabel-variabel tersebut. Jika hasil regresi menunjukkan bahwa jumlah kursi yang tersisa memiliki koefisien negatif, maka semakin sedikit kursi yang tersedia, harga tiket cenderung naik. Begitu pula, jika periode liburan memiliki koefisien positif, tiket pada saat liburan akan lebih mahal.

▷ Analisis regresi ini membantu maskapai dalam merancang strategi penentuan harga yang dinamis dan efisien. Dengan mempertimbangkan faktor-faktor penting secara simultan, maskapai dapat memaksimalkan keuntungan sekaligus meningkatkan okupansi pesawat. Bagi konsumen, pemahaman tentang pola ini dapat membantu mereka menemukan waktu terbaik untuk membeli tiket dengan harga lebih murah. Oleh karena itu, regresi ekonometrik tidak hanya berguna bagi industri penerbangan tetapi juga bermanfaat bagi konsumen yang ingin merencanakan perjalanan lebih hemat.

Rangkuman

- ▷ Diagram pencar atau *scatter plot* dapat digunakan untuk menunjukkan hubungan antara dua variabel yang digambarkan dalam bentuk titik-titik (points) pada bidang koordinat Cartesius.
- ▷ Variabel independen adalah variabel yang mempengaruhi atau menyebabkan berubahnva variabel dependen.
- ▷ Variabel dependen adalah variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen.
- ▷ Hubungan linear antara dua variabel pada diagram pencar disebut korelasi.
- ▷ Outier atau pencilan adalah data yang menyimpang terialu jauh dari data lain darisekumpulan data.
- ▷ Korelasi antara dua variabel tidak selalu menunjukkan hubungan sebab-akibat pada keduanya.
- ▷ Garis regresi atau garis best-fit adalah gars yang paling tepat untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel. Bentuk persamaan garis regresi:

$$\hat{y} = mx + c$$

dengan:

$\hat{y}$ = nilai variabel dependen yang diprediksikan

x = nilai variabel independent

m = koefisien regresi (gradien garis regresi)

c = konstanta (nilai $\hat{y}$ jika x = 0)

- ▷ Residu adalah jarak vertikal antara titik-titik data dan garis regresi. Nilai residu:

$$\text{Residu } (\varepsilon) = y - \hat{y}$$

dengan y = nilai variabel dependen yang diamati

$\hat{y}$ = nilai variabel dependen yang diprediksi

- ▷ Rumus persamaan garis regresi sebagai berikut.

$$\hat{y} - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{{s_x}^2}(x - \bar{x}) \text{ atau } \hat{y} - \bar{y} = \frac{SS_{xy}}{SS_{xy}}(x - \bar{x})$$

dimana:

$\bar{x}$ = rata-rata nilai x

$\bar{y}$ = rata-rata nilai y

s_{xy} = kovariansi dari x dan y

s_x = standar deviasi dari x

SS_{xy} = jumlah perkalian antara selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya dan variabel dependen y terhadap rata-ratanya

SS_{xx} = jumlah kuadrat selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya

- ▷ Interpolasi adalah penggunaan garis regresi untuk memprediksi nilai yang berada didalam rentang data.
- ▷ Ekstrapolasi adalah penggunaan garis regresi untuk memprediksi nilai yang berada di luar rentang data.
- ▷ Koefisien korelasi merupakan nilai yang menunjukkan kekuatan dan arah hubungan antara dua variabel dengan nilai berkisar antara −1 ≤ r 5 ≤ +1.

- Rumus koefisien korelasi Pearson:

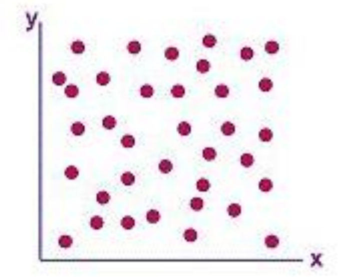
$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}} \text{ atau } r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$$

- Rumus koefisien determinasi:

$$\text{Koefisien determinasi} = r^2 \times 100\%$$

Latihan Soal

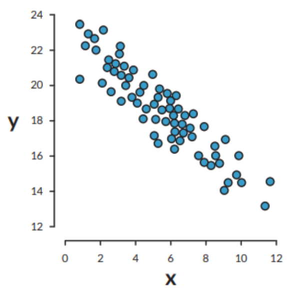
1. Perhatikan diagram pencar berikut.



Jenis koreasi antara variabel x dan y pada diagram tersebut adalah …

a. Korelasi negative
b. Korelasi positif
c. Korelasi kuadratik
d. Korelasi nonlinear
e. Tidak ada korelasi

2. Berikut adalah diagram pencar yang menyatakan hubungan variabel x dan y.



Pernyataan yang sesuai dengan diagram tersebut adalah ...

a. Semakin meningkat nilai variabel X, maka nilai variabel Y semakin menurun
b. Semakin meningkat nilai variabel X, maka nilai variabel Y juga meningkat
c. Semakin menurun nilai variabel X, maka nilai variabel Y juga menurun
d. Variabel x tidak mempengaruhi variabel Y
e. Tidak ada hubungan antara variabel X dan variabel Y

3. Diketahui $\bar{x} = 5$; $\bar{x} = 3$, $SS_{xy} = -0{,}8$; dan $SS_{xx} = 2$. Persamaan garis regresi yang menunjukkan hubungan variabel x dan y adalah …

a. $\hat{y} = -0{,}2x + 0{,}2$
b. $\hat{y} = -0{,}2x + 1$
c. $\hat{y} = -0{,}4x + 2$
d. $\hat{y} = 0{,}4x + 5$
e. $\hat{y} = 4x + 3$

4. Perhatikan data pada tabel berikut.

x	1	2	3	4
y	6	2	1	1

Persamaan garis regresi yang menunjukkan hubungan antara x dan y adalah ...

a. $\hat{y} = 3x - 4$
b. $\hat{y} = -2x + 5$
d. $\hat{y} = -1{,}6x + 6{,}5$
e. $\hat{y} = 3x - 1{,}5$

c. $\hat{y} = -x + 7{,}4$

5. Berikut merupakan persamaan garis regresi yang menyatakan hubungan usia seorang anak dalam satuan bulan (x) dengan berat badan dalam satuan kilogram (y).

$$\hat{y} = 4{,}2 + 0{,}44x$$

Prediksi berat badan anak tersebut saat baru lahir adalah ...

a. 3,76 kg
b. 4,20 kg
c. 4,44 kg
d. 5,64 kg
e. 5,88 kg

6. Perhatikan data pada tabel berikut.

x	1	3	7	9
y	3	4	5	6

Perkiraan nilai y untuk x = 6 adalah ....

a. 2,1
b. 2,75
c. 4,75
d. 4,80
e. 4,85

7. Perhatikan data pada tabel berikut.

x	3	5	7	10
y	1	4	5	8

Nilai koefisien korelasi Pearson dari data tersebut adalah ....

a. 0,996
b. 0,986
c. 0,972
d. 0,886
e. 0,872

Tabel berikut menyajikan data jumlah produksi (dibulatkan sampai ke ribuan terdekat) dan persentase cacat benang rayon. Perhatikan data pada tabel berikut untuk menjawab soal nomor 8–10.

Minggu	Jumlah Produksi (Ribuan Cone)	Persentase Produk Cacat (%)
I	19	1,1
II	16	0,9
III	13	0,5
IV	18	0,3
V	4	0,6

8. Nilai koefisien korelasi antara jumlah produksi terhadap persentase produk cacat adalah ...

a. 0,28
b. 0,27
c. 0,26
d. 0,31
e. 0,32

9. Tingkat korelasi antara jumlah produksi dengan persentase produk cacat adalah ...

a. Sempurna
d. Lemah

b. Kuat

c. Sedang

e. Sangat Lemah

10. Berdasarkan data jumlah produksi dan persentase produk cacat benang rayon, koefisien determinasi data tersebut adalah ...

    a. 7,26%

    b. 6,72%

    c. 6,27%

    d. 5,83%

    e. 5,38%

Akses latihan soal lainnya di sini yuk!

Latihan Soal Matematika Kelas 11 BAB 4

Referensi

Darwis, R. (2017). *Asumsi-asumsi dalam Regresi Linier dan Penanggulangannya*. Jurnal Ilmu Statistika dan Komputasi, 8(1), 12–22.

Friendly, M., & Denis, D. J. (2005). *The early origins and development of the scatterplot*. Journal of the History of the Behavioral Sciences, 41(2), 103–130.

Gomez-Uribe, C. A., & Hunt, N. (2015). *The Netflix Recommender System: Algorithms, Business Value, and Innovation*. ACM Transactions on Management Information Systems (TMIS), 6(4), 13.

Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2009). *Basic Econometrics* (5th ed.). New York: McGraw-Hill Education.

Noormandiri, B. K. (2023). *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

Rumsey, D. J. (2016). *Statistics For Dummies* (2nd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Sutomo, S. (2020). *Analisis Ekonometrika dalam Penelitian Transportasi*. Surabaya: Unesa University Press.

Trihendradi, C. (2010). *Analisis Statistik dengan Microsoft Excel dan SPSS*. Yogyakarta: Andi.

Wittman, M. D., & Swelbar, W. S. (2013). *Trends and Market Forces Shaping Small Community Air Service in the United States*. MIT International Center for Air Transportation.